

Sommaire

I- Théorème des valeurs intermédiaires

1-1/ Propriété (Théorème des valeurs intermédiaires)

1-2/ Conséquences

II- Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$

2-1/ Théorème

2-2/ Relation entre  $f$  et sa réciproque  $f^{-1}$

2-3/ Propriétés de la fonction réciproque  $f^{-1}$

III- La fonction racine d'ordre  $n$  (ou racine  $n^{\text{ième}}$ )

3-1/ Définition et théorème

3-2/ Cas particuliers

3-3/ Propriétés

3-4/ Limites de la fonction  $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$

VI- Puissance rationnelle d'un nombre réel positif

4-1/ Définition

4-2/ Propriétés

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

5-2/ Exercice 2

5-3/ Exercice 3

5-4/ Exercice 4

5-5/ Exercice 5

5-6/ Exercice 6

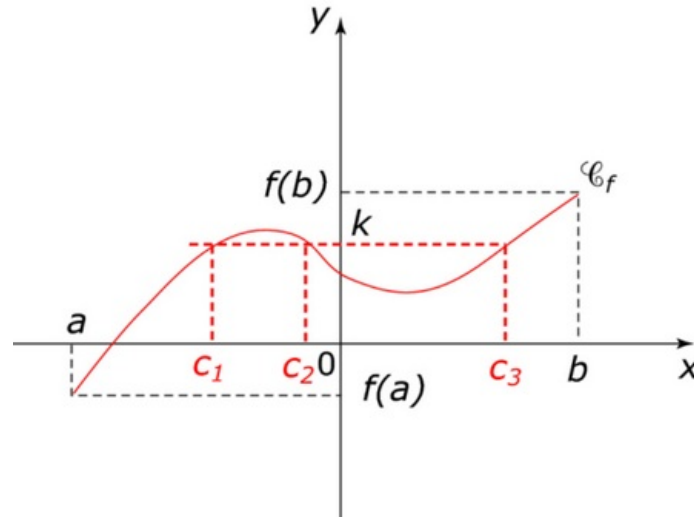
---

## I- Théorème des valeurs intermédiaires

### 1-1/ Propriété (Théorème des valeurs intermédiaires)

$f$  est une fonction continue sur  $[a, b]$ .

Pour tout nombre  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un élément  $c$  de  $[a, b]$  tel que  $f(c) = k$



### 1-2/ Conséquences

Puisque la fonction  $f$  est continue on a  $f([a, b]) = [m, M]$  (l'image d'un segment est un segment).

Si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et  $f(a)f(b) < 0$  alors l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution  $c$  dans  $]a, b[$ .

### Exemples

### 1-3/ Cas d'une fonction continue et monotone

$f$  est une fonction continue et strictement monotone sur  $[a, b]$ .

Pour tout nombre  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe un seul un élément  $c$  de  $[a, b]$  tel que  $f(c) = k$

## II- Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I$

### 2-1/ Théorème

Toute fonction continue et strictement monotone sur  $I$ , admet une fonction réciproque définie sur  $f(I)$

$f : I \mapsto J$  est une fonction si tout  $x \in I$  a une et seule image  $y \in J$  et de même si tout  $y \in J$  a un et seul antécédent  $x \in I$

On définit une autre fonction notée  $f^{-1}$  et appelée fonction réciproque de  $f$  avec :

$$\begin{aligned} f : I &\mapsto J = f(I) \\ x \mapsto f(x) = y \text{ et } f^{-1} : J = f(I) &\mapsto I \\ y \mapsto f^{-1}(y) = x \end{aligned}$$

## 2-2/ Relation entre $f$ et sa réciproque $f^{-1}$

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in J \end{cases}$$

et

$$\forall x \in I : f^{-1} \circ f(x) = x$$

et

$$\begin{cases} \forall y \in J : f \circ f^{-1}(y) = y \\ \forall x \in I : f^{-1} \circ f(x) = x \end{cases}$$

## 2-3/ Propriétés de la fonction réciproque $f^{-1}$

La fonction réciproque  $f^{-1}$  est continue sur  $J = f(I)$

La fonction réciproque  $f^{-1}$  et  $f$  varient dans le même sens.

$(C_f)$  et  $(C_{f^{-1}})$  sont symétriques par rapport à la 1<sup>er</sup> bissectrice  $((D) : y = x)$

## III- La fonction racine d'ordre $n$ (ou racine $n^{\text{ième}}$ )

### 3-1/ Définition et théorème

La fonction  $f(x) = x^n$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ) est continue et strictement croissante sur  $[0, +\infty[$

Sa fonction réciproque  $f^{-1}$  sera notée  $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$  et appelée La fonction racine d'ordre  $n$  (ou la fonction racine  $n^{\text{ième}}$ )

On l'appelle  $\sqrt[n]{x}$  la racine d'ordre  $n$  du réel positif  $x$

### 3-2/ Cas particuliers

Cas  $n = 1$  on a  $f^{-1}(x) = \sqrt[1]{x} = x$  (pas d'importance). Donc on prend  $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$

Cas  $n = 2$  on a  $f^{-1}(x) = \sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$  (racine carrée)

Cas  $n = 3$  on a  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$  (racine cubique ou racine d'ordre 3)

### 3-3/ Propriétés

Soient $a$ et $b$ de $\mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$			
$\sqrt[n]{1} = 1 ; \sqrt[n]{0} = 0$	$(\sqrt[n]{a})^n = a$	$\sqrt[n]{a^n} = a$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$	$\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a \leq b$	$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$	$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a}$	$(b > 0) ; \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$	$(b > 0) ; \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	

### 3-4/ Limites de la fonction $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ et } l \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$$

Les deux propriétés restent vraies si on remplace  $x \rightarrow x_0$  par  $x \rightarrow x_0^-$  ou  $x \rightarrow x_0^+$  ou  $x \rightarrow x + \infty$

## Exemples

## VI- Puissance rationnelle d'un nombre réel positif

### 4-1/ Définition

$x \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $m \in \mathbb{Z}$

On pose  $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

Le nombre  $\sqrt[n]{x^m}$  son écriture sera de la façon suivante  $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$  ou encore par  $\sqrt[n]{x^m} = x^r$   
 $x^r$  est appelé puissance rationnelle du nombre réel positif  $x$  d'exposant  $r$

( $0^r = 0$  ;  $r \neq 0$ )

### 4-2/ Propriétés

$\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall b \in \mathbb{R}^{+*}$			
$a^r \cdot 0$ avec $r, r' \in \mathbb{Q}$	$a^r = b^r \Leftrightarrow r = r'$	$a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$	$a^r \times b^r = (a \times b)^r$
$(a^r)^{r'} = a^{r \times r'}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$	$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$	$\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$

## V- Exercices

### 5-1/ Exercice 1

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par:  $f(x) = x^6 + 2x^4 - 1$ .

1. Montrer que l'équation  $x^6 + 2x^4 - 1 = 0$  admet au moins une solution sur  $]0; 1[$ .

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par:  $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ .

2. Dresser le tableau de variation de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ . On note cette solution par  $\alpha$ .
4. Déterminer le signe de  $g(x)$  sur  $[1; +\infty[$ .

### 5-2/ Exercice 2

On considère la fonction  $f$  définie par:  $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ .

1. Déterminer  $D_f$ , puis calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .
2. Montrer que:  $(\forall x \in D_f) f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ .
3. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
4. Déterminer  $f(]-\infty; -2])$ ,  $f(]-2; -1[)$ ,  $f(]-1; 0])$  et  $f([0; +\infty[)$ .

Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $]-\infty; -2]$ .

5. Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera.
6. Montrer que:  $(\forall x \in J) g^{-1}(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4x}}{2}$ .

### 5-3/ Exercice 3

1. Calculer les limites suivantes :

1-  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt[3]{x+7}}{x-1}$

2-  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{3x-5}}$

3-  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{5x^2 + x + 1} + 2x$

4-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^3 + 3x + 1} - 2x$

5-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 2}{3x^2 + \sqrt[3]{2x^2 + 1} - 5}$

6-  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x + 1}{\sqrt[3]{8x^2 + 3} - \sqrt[3]{8x^2 + 1}}$

### 5-4/ Exercice 4

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1; +\infty[$  par :  $f(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}$

1. Montrer que:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

2. Montrer que  $f$  est continue sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ .

3. Montrer que  $(\forall x > 1) f'(x) = \frac{2x(x^2-2)}{\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x^2-1}+1)}$ .

4. Dédurre les variations de  $f$  sur  $[1; +\infty[$ .

Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur  $[\sqrt{2}; +\infty[$ .

5. Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque définie sur un interval  $J$  à déterminer.

6. Montrer que  $(\forall x \in [\sqrt{2}; +\infty[) : g(x) = (\sqrt{x^2 - 1} - 1)^2$ .

7. Dédurre  $g^{-1}(x), \forall x \in J$ .

### 5-5/ Exercice 5

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par:  $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$ .

1. Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

2. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $a$  dans  $] -\frac{1}{2}; 0[$ .

3. Calculer  $f\left(-\frac{1}{4}\right)$ , puis déduire un encadrement de  $a$  d'amplitude  $0, 25$ .

4. Montrer que  $\sqrt{a+1} = \frac{-2a}{a+1}$

### 5-6/ Exercice 6

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{1}{x} - 2\sqrt{x+1}$ .

1. Justifier que  $D_f = [-1; 0[ \cup ]0; +\infty[$ .

2. Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .

3. Montrer que  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$ .

4. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $\left] \frac{1}{4}; 1 \right[$ .
5. Vérifier que  $4\alpha^3 + 4\alpha^2 - 1 = 0$ .