

Sommaire

I- Continuité et continuité à droite et à gauche d'une fonction en un point  $x_0$

1-1/ Continuité d'une fonction en un point  $x_0$

1-2/ Continuité à droite et à gauche d'une fonction en un point  $x_0$

II- Continuité sur un intervalle

2-1/ Définitions

III- Opérations sur les fonctions continues sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$

3-1/ Propriétés

IV- Continuité des fonctions usuelles

4-1/ Propriétés

V- Image d'un intervalle par une fonction continue

5-1/ Propriétés

VI- Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

VII- Continuité de la composée de deux fonctions continues

IIIX- Exercices

8-1/ Exercice 1

8-2/ Exercice 2

8-3/ Exercice 3

8-4/ Exercice 4

8-5/ Exercice 5

8-6/ Exercice 6

---

## I- Continuité et continuité à droite et à gauche d'une fonction en un point $x_0$

### 1-1/ Continuité d'une fonction en un point $x_0$

#### Définition

$f$  est une fonction définie sur  $D_f$  et  $I_{x_0}$  est un intervalle ouvert et contient  $x_0$  et inclus dans  $D_f$

$$f \text{ est continue au point } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

#### Exemple

### 1-2/ Continuité à droite et à gauche d'une fonction en un point $x_0$

#### Définition 1

$f$  est une fonction définie sur  $D_f$  et  $I_d = [x_0, x_0 + r[$  ; ( $r > 0$ ) est un intervalle inclus dans  $D_f$

$$f \text{ est continue à droite au point } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

#### Définition 2

$f$  est une fonction définie sur  $D_f$  et  $I_g = ]x_0 - r, x_0]$  ; ( $r > 0$ ) est un intervalle inclus dans  $D_f$

$$f \text{ est continue à gauche au point } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$$

#### Propriété

$f$  est continue au point  $x_0$  si et seulement si  $f$  continue à droite et à gauche de  $x_0$ .

Ou encore :

$$f \text{ est continue au point } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$$

#### Exemples

## II- Continuité sur un intervalle

### 2-1/ Définitions

$f$  est continue sur un intervalle ouvert  $I = ]a, b[ \Leftrightarrow$  pour tout  $x$  de  $I$  ;  $f$  est continue en  $x$ .

$f$  est continue sur  $[a, b[ \Leftrightarrow f$  est continue sur  $]a, b[$  et  $f$  est continue à droite de  $a$ .

$f$  est continue sur  $]a, b] \Leftrightarrow f$  est continue sur  $]a, b[$  et  $f$  est continue à gauche de  $b$ .

$f$  est continue sur  $[a, b] \Leftrightarrow f$  est continue sur  $]a, b[$  et  $f$  est continue à droite de  $a$  et à gauche de  $b$ .

## III- Opérations sur les fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$

### 3-1/ Propriétés

$f$  est continue sur  $I$  et  $g$  est continue sur  $I$ .

Les fonctions  $f + g$  et  $f \times g$  et  $\alpha f$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) sont continues sur  $I$ .

Les fonctions  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{f}{g}$  sont continues sur  $I$  ( pour  $x \in I$  tel que  $g(x) \neq 0$ ).

## IV- Continuité des fonctions usuelles

### 4-1/ Propriétés

Toute fonction polynomiale est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Toute fonction rationnelle est continue sur toute intervalle inclu dans  $D_f$ .

Les fonctions  $x \mapsto \sin(x)$  et  $x \mapsto \cos(x)$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $x \mapsto \tan(x)$  est continue sur toute intervalle inclu dans  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

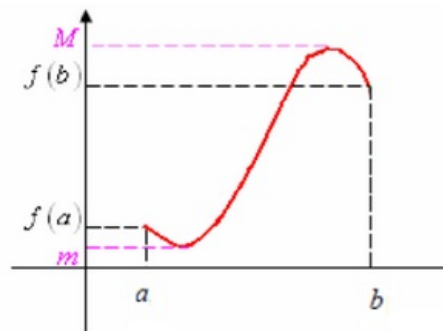
La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

## V- Image d'un intervalle par une fonction continue

### 5-1/ Propriétés

L'image du segment  $[a, b]$  par une fonction continue est un segment  $J = [m, M]$  ( $m$  est la plus petite image et  $M$  est la plus grande image par  $f$  des éléments de  $[a, b]$ ) càd

$$f([a, b]) = [m, M]$$



L'image d'un intervalle  $I$  par une fonction continue est un intervalle  $J$ . On note  $J = f(I)$

## VI- Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

l'intervalle $I$	$f$ est croissante sur $I$	$f$ est décroissante sur $I$
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)]$
$]a; b]$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)]$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$]a; b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$[a; +\infty[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)]$
$] -\infty; b]$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(b)]$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$

## VII- Continuité de la composée de deux fonctions continues

### 1-1/ Théorème

$f$  est continue en  $x_0$  et  $g$  est continue en  $f(x_0)$ , alors la fonction  $g \circ f$  est continue en  $x_0$

$f$  est continue sur  $I$  et  $g$  est continue sur  $f(I)$ , alors la fonction  $g \circ f$  est continue sur  $I$

## 1-2/ Applications

$f(x) = \sin(ax + b)$  et  $g(x) = \cos(ax + b)$  sont continues sur  $\mathbb{R}$

$h(x) = \tan(ax + b)$  est continue pour tout  $x$  tel que  $ax + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Si  $f$  est positive et continue sur  $I$  alors  $g(x) = \sqrt{f(x)}$  est continue sur  $I$ .

## IIIX- Exercices

### 8-1/ Exercice 1

1. Étudier la continuité de  $f$  en  $x_0$  dans les cas suivants :

$$\text{a- } x_0 = 5 \text{ et } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 25} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 5\} \\ f(5) = 8 \end{cases}$$

$$\text{b- } x_0 = -1 \text{ et } \begin{cases} f(x) = \frac{2}{x^3 + 1} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ f(-1) = 3 \end{cases}$$

$$\text{c- } x_0 = 3 \text{ et } \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} ; x \in [0; +\infty[ \setminus \{3\} \\ f(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable  $x$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x+1} ; 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ f(x) = 2x + ax^2 ; \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

2. Déterminer la valeur de  $a$  pour que  $f$  est continue en  $x_0 = \frac{1}{2}$

3. Etudier la continuité de  $f$  en  $x_0$  :

$$x_0 = 1 \text{ et } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} ; x > 1 \\ f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{2 - x} - 1} ; x < 1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

### 8-2/ Exercice 2

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[2; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} \forall x > 2, f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ f(2) = 4 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de  $f$  sur  $[2; +\infty[$

### 8-3/ Exercice 3

1. Calculer l'image de l'intervalle  $I$  par  $f$  dans les cas suivantes:

$$\text{a- } f(x) = x^2 - 2x + 3 ; I = [-2; 3]$$

$$\text{b- } f(x) = \frac{x-1}{x+2} ; I = ]-2; +\infty[$$

$$\text{c- } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 1 ; I = ]-\infty; 1]$$

### 8-4/ Exercice 4

1. Étudier la continuité de  $f$  sur  $I$  dans les cas suivants :

a-  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$  ;  $I = [1; +\infty[$

b-  $f(x) = \sqrt{-\sin^2(x) + \sin(x) + 2}$  ;  $I = \left[0; \frac{\pi}{6}\right[$

### 8-5/ Exercice 5

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(2) = 4$  et  $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - x - 2}$  si  $x \neq 2$

1. Déterminer  $D_f$ .

2. Montrer que  $f$  est continue en  $x_0 = 2$ .

3. Vérifier que :  $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}), f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 1}$

4. Justifier que  $f$  est continue sur chacun des intervalles  $]-\infty; -1[$  et  $]-1; +\infty[$ .

### 8-6/ Exercice 6

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(1) = a$  et  $f(x) = \frac{x^2\sqrt{x+3} - 2}{1 - x^2}$  si  $x \neq 1$  où  $a \in \mathbb{R}$ .

1. Déterminer  $D_f$ , puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2. Pour quelle valeur de  $a$  la fonction  $f$  est-elle continue en  $x_0 = 1$  ?