Mathématiques : 2 Bac SPC-SVT-STE-STM

Séance 7 (Fonctions primitives)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Primitives d'une fonction numérique

1-1/ Définition

Une fonction F est une primitive d'une fonction f définie sur un intervalle I si :

$$\forall x \in I \ : \ F'(x) = f(x)$$

Exemple

1-2/ Propriété 1

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une fonction primitive sur I.

1-3/ Propriété 2

F est une primitive d'une fonction f définie sur un intervalle I.

Toute fonction primitive G de f sur I est de la forme
$G(x) = F(x) + c\,;\ \ (c \in \mathbb{R})$.

1-4/ Propriété 3

F est une primitive d'une fonction f définie sur un intervalle I.

Toute fonction primitive G de f sur I est de la forme
$G(x) = F(x) + c\,;\ \ (c \in \mathbb{R})$.

$x_0 \in I \; et \; y_0 \in \mathbb{R}$; il existe une seule fonction primitive G de f qui vérifie la condition $G(x_0) = y_0$.

II- Fonctions primitives de la somme de deux fonctions

Propriété

F et G sont les primitives respectivement de f et g sur I.

On a $F + G$ est une primitive de $f + g$.

Exemple

III- Produit d'une fonction par un réel α

Propriété

F est la primitive de f sur I et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a αF est une primitive de αf.

Exemple

IV- Opérations sur les fonctions primitives

$f(x)$	$F(x)$
$u'(x)+v'(x)$	$u(x)+v(x)+\mathrm{k}$
$au'(x)$; $(a\in\mathbb{R})$	$au(x)$
$u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$	$u(x)\times v(x)+\mathrm{k}$
$\dfrac{-v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$	$\dfrac{1}{v(x)}+\mathrm{k}$
$\dfrac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$	$\dfrac{u(x)}{v(x)}+\mathrm{k}$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}+\mathrm{k}$
$u'(x)\times\left[u(x)\right]^r$; ($r\in\mathbb{Q}^*-\{-1\}$)	$\dfrac{\left[u(x)\right]^{r+1}}{r+1}+\mathrm{k}$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}+\mathrm{k}$	$\ln\lvert u(x)\rvert+\mathrm{k}$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}+\mathrm{k}$
$\cos(ax+b)$; $(a\neq 0)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)+\mathrm{k}$
$\sin(ax+b)$; $(a\neq 0)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)+\mathrm{k}$

V- Fonctions primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$F(x)$
$a\in\mathbb{R}$	$ax+k$
x	$\dfrac{1}{2}x^2+k$
$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{-1}{x}+k$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+k$
x^r ; $(r\in\mathbb{Q}^*-\{-1\})$	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1}+k$
$\sin x$	$-\cos x+k$
$\cos x$	$\sin x+k$
$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+k$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+k$
e^x	e^x+k

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

1. Déterminer les fonctions primitives de chacune des fonctions suivantes :

1 $f(x)=8x^7-12x^4-14x^3-6x+5$ 2 $f(x)=-4x^5+\frac{2}{x^2}+3$ 3 $f(x)=(11x+1)^5$ 4 $f(x)=\frac{20x-6}{(5x^2-3x+2)^8}$ 5 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$	6 $f(x)=\frac{x^8}{\sqrt{4x^9+1}}$ 7 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ 8 $f(x)=\sqrt[3]{x^5}$ 9 $f(x)=\sqrt[3]{5x-7}$

6-2/ Exercice 2

1. Déterminer la fonctions primitive g de la fonction f tel que g prend la valeur y_0 par g en x_0, pour chaque cas suivant :

$$1\ \ y_0=0\ ;\ \ x_0=1\ ;\ \ f(x)=x^3-6x^2+1$$
$$2\ \ y_0=1\ ;\ \ x_0=0\ ;\ \ f(x)=(x+1)^3$$

6-3/ Exercice 3

1. Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I :

$$1\ \ f(x)=x^3-2x^2+3x-5\ ;\ \ I=\mathbb{R}$$
$$2\ \ f(x)=\frac{3}{x^2}\ ;\ \ I=\left[1,+\infty\right[$$
$$3\ \ f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}\ ;\ \ I=\left[1,+\infty\right[$$
$$4\ \ f(x)=\frac{1}{x^2}\ ;\ \ I=\left]0,+\infty\right[$$
$$5\ \ f(x)=3x^2\left(x^3-1\right)\ ;\ \ I=\mathbb{R}$$
$$6\ \ f(x)=\frac{2x}{(x^2-3)^3}\ ;\ \ I=\left[4,+\infty\right[$$
$$7\ \ f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ ;\ \ I=\mathbb{R}$$

6-4/ Exercice 4

Soit $f : x \mapsto \frac{x^3-3x^2+7}{(x-2)^2}$ définie sur $I=[3,+\infty[$.

1. Déterminer a, b et c de façon que $f(x)=ax+b+\frac{c}{(x-2)^2}$.
2. Calculer les primitives de f sur $I=[3,+\infty[$.
3. En déduire la primitive F de f sachant que $F(3)=\frac{11}{2}$.

6-5/ Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=2x^2+x+1+\frac{1}{x^2}$

1. Déterminer les fonctions primitives de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

2. Déterminer la fonction primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$ tel que $F(1) = 3$.

6-6/ Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{5x^4+40x^2+20x+80}{(x^2+4)^2}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $f(x) = \frac{ax+b}{(x^2+4)^2} + c$.
2. Déterminer la fonctions primitives F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ tel que : $F(0) = c$.