AlloSchool

Mathématiques : 2 Bac SPC-SVT-STE-STM

Séance 9 (Nombres complexes – Partie 1)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Introduction aux nombres complexes

1-1/ Définitions

Un nombre complexe est un nombre tel que son écriture est de la forme $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et i est un nombre imaginaire avec $i^2 = -1$.

Les nombres complexes constituent un ensemble est appelé ensemble des nombres complexes, on le note $\mathbb{C}$.

L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni de deux opérations : l'addition notée $+$ et la multiplication notée $\times$, qui ont les mêmes propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$ (commutativité, associativité ....).

$$a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow (a = a' \; et \; b = b')$$

Exemple

1-2/ Vocabulaire

Les nombres $1 + i$ et $1 - i$ sont appelés nombres complexes.

En général : un nombre complexe est écrit de la forme $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Le nombre complexe $z' = a - ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est appelé le nombre complexe conjugué de z noté $\overline{z}$.

- Exemple : $\begin{cases} z = 3 + 4i \\ z' = -5 - 2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{z} = 3 - 4i \\ \overline{z'} = -5 + 2i \end{cases}$

L'écriture $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est appelée l'écriture (ou la forme) algébrique de z.

Le réel a est appelé la partie réelle, et on note $Re\,(z) = a$.

Le réel b est appelé la partie imaginaire, et on note $Im\,(z) = b$.

1-3/ Opérations dans l'ensemble $\mathbb{C}$

$z = x + yi, z' = x' + y'i \in \mathbb{C}$ avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$

Addition dans $\mathbb{C}$

$z + z' = x + yi + x' + y'i = (x + x') + (y + y')i$

Multiplication dans $\mathbb{C}$

$z \times z' = (x + yi) \times (x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + yx')i$

L'inverse de z

$z = a + bi \neq 0 \, ((a,b) \neq (0,0))$

$\Rightarrow$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{\overline{z}}{z.\overline{z}} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}$

$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$

Le quotient de z par z'

$\frac{z}{z'} = \frac{x+yi}{x'+y'i} = \frac{z \times \overline{z'}}{z' \times \overline{z'}}$

$\frac{z}{z'} = \frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2} + \frac{yx'-xy'}{x'^2+y'^2} i$

Exemples

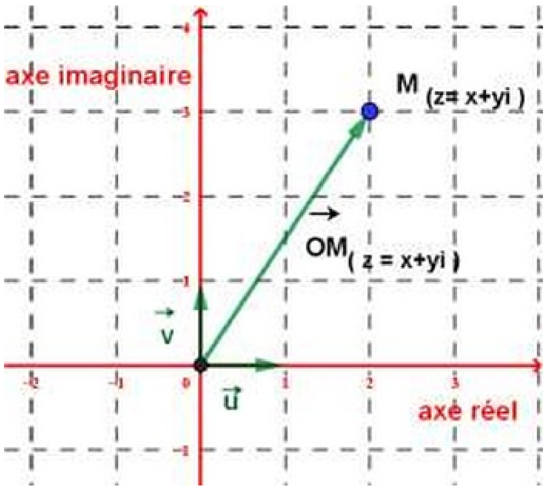
II- Présentation géométrique d'un nombre complexe

2-1/ Introduction

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

À tout nombre complexe $z = x + yi$ de $\mathbb{C}$ on lui associe le point $M\,(x, y)$ de (P) tel que :

$$f\,(z) = f\,(x + yi) = M\,(x, y)$$



Le plan (P) est appelé le plan complexe.

Le point $M\,(x, y)$ est l'image du complexe $z = x + yi$.

2-2/ Propriétés des affixes

$A\,(z_A)$, $B\,(z_B)$, $C\,(z_C)$ et $I\,(z_I)$ sont 4 points du plan complexe (P).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Le vecteur $k\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $k\,(z_B - z_A)$.

Le point I milieu de $[AB]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$.

$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ $(k \in \mathbb{R})$ càd $z_C - z_A = k\,(z_B - z_A)$, d'où les points A et B et C sont alignés ($z_B - z_A \neq 0$).

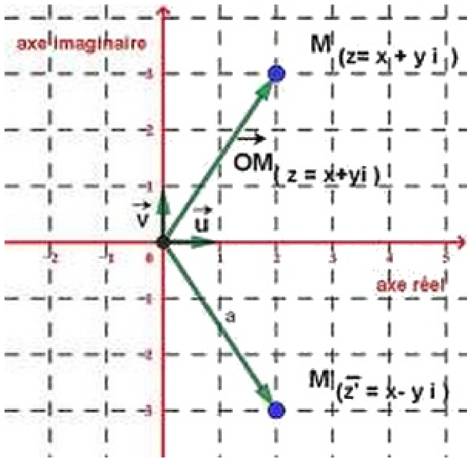
Exemple

III- Conjugué d'un nombre complexe

3-1/ Définition

Le nombre complexe $z' = x - yi$ est appelé le conjugué du nombre complexe $z = x + yi$

On note $z' = \overline{z} = x - yi$.



3-2/ Propriétés

Soient $z = x + yi$ et $z' = x' + y'i$ deux nombres complexes avec $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$. On a :

$z + \overline{z} = 2x = 2Re\,(z)$

$z - \overline{z} = 2y = 2Im\,(z)$

$z \times \overline{z} = x^2 + y^2$

$\overline{(\overline{z})} = z$

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

$z \in \mathbb{R} \leftrightarrow \overline{z} = z$

$z \in i\mathbb{R} \leftrightarrow \overline{z} = -z$

Exemple

IV- Module d'un nombre complexe

4-1/ Définition

Soit $z = x + yi \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Le nombre réel positif $\sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ s'appelle le module de z.

On le note $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4-2/ Propriétés 1

Soient $z_A = x_A + y_A i$ et $z_B = x_B + y_B i$ et $z_C = x_C + y_C i$ les affixes des points A et B et C avec $z_A \neq z_C$.

On a $AB = z_B - z_A = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

$\left|\frac{z_B - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AB}{AC}$

Si $\left|\frac{z_B - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AB}{AC} = 1$ alors le triangle ABC est isocèle en A.

4-3/ Propriétés 2

$$|\overline{z}| = |-z| = |z| = |-\overline{z}|$$
$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$
$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$
$$\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|} \; et \; \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$
$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$
$$|z^p| + |z|^p \; ; \; p \in \mathbb{Z} \; et \; z \neq 0$$

V- Argument d'un nombre complexe non nul

5-1/ Définition

Soit $M(z)$ $(M(z) \neq O \leftrightarrow z \neq 0)$ est un point du plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

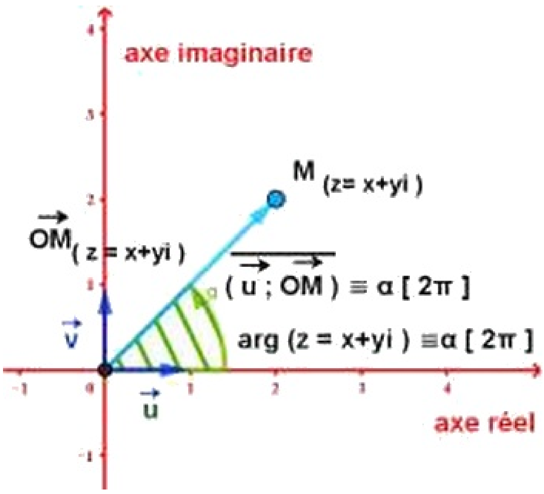
Toute mesure α de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ s'appelle argument du nombre complexe non nul z.

On note

$arg(z) = \alpha \, [2\pi]$

$arg(z) = \overline{\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)} \; [2\pi]$

$arg(z) = \alpha + 2k\pi$; k $\in \mathbb{Z}$.



5-2/ Propriétés

z et z' deux complexes non nuls :

$$arg(z \times z') \equiv arg(z) + arg(z') \; [2\pi]$$
$$arg\left(\frac{1}{z'}\right) \equiv -arg(z') \; [2\pi]$$
$$arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv arg(z) - arg(z') \; [2\pi]$$
$$p \in \mathbb{Z} \; ; \; arg(z^p) \equiv p \times arg(z) \; [2\pi]$$
$$k > 0 \Rightarrow arg(kz) \equiv arg(z) \; [2\pi]$$
$$k < 0 \Rightarrow arg(kz) \equiv \pi + arg(z) \; [2\pi]$$

VI- Écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul

6-1/ Définition

Soit $z = x + yi$ un nombre complexe non nul tel que $arg\left(z\right) \equiv \alpha \ \left[2\pi\right]$ et $r = |z|$.

Le nombre complexe non nul z s'écrit de les formes suivantes :

$z = |z|\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)$
$z = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)$
$\left[|\mathrm{z}|, arg\left(z\right)\right] = \left[r, \alpha\right]$

Chaque écriture précédente est appelé la forme (ou l'écriture) trigonométrique du nombre complexe non nul $z = x + yi$.

6-2/ Propriétés

$$z = a > 0 \Rightarrow z = [a, 0]$$
$$z = a < 0 \Rightarrow z = [-a, \pi]$$
$$z = bi \ ; \ b > 0 \Rightarrow z = \left[b, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$z = bi \ ; \ b < 0 \Rightarrow z = \left[b, -\frac{\pi}{2}\right]$$
$$z = [r, \alpha] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -z = [r, \pi + \alpha] \\ \\ \overline{z} = [r, -\alpha] \\ \\ -\overline{z} = [r, \pi - \alpha] \end{array} \right\}$$

VII- Opérations sur les formes trigonométriques

z et z' deux complexes non nuls tel que : $\left\{ \begin{array}{l} z = [r, \alpha] = r\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right) \\ z\text{'} = [r\text{'}, \alpha\text{'}] = r\text{'}\left(\cos\alpha\text{'} + i\sin\alpha\text{'}\right) \end{array} \right.$

On a :

$$z \times z\text{'} = [r, \alpha] \times [r\text{'}, \alpha\text{'}] = [r \times r\text{'}, \alpha + \alpha\text{'}] = rr\text{'}\left(\cos\left(\alpha + \alpha\text{'}\right) + i\sin\left(\alpha + \alpha\text{'}\right)\right)$$
$$z^n = [r, \alpha]^n = [r^n, n\alpha]$$
$$[1, \alpha]^n = [1^n, n\alpha] = [1, n\alpha] \Leftrightarrow \left[\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)^n = \left(\cos n\alpha + i\sin n\alpha\right)\right]$$
$$\frac{1}{z\text{'}} = \frac{1}{[r\text{'}, \alpha\text{'}]} = \left[\frac{1}{r\text{'}}, -\alpha\text{'}\right]$$
$$\frac{z}{z\text{'}} = \frac{[r, \alpha]}{[r\text{'}, \alpha\text{'}]} = \left[\frac{r}{r\text{'}}, \alpha - \alpha\text{'}\right]$$
$$\Leftrightarrow \frac{z}{z\text{'}} = \frac{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{r\text{'}(\cos\alpha\text{'} + i\sin\alpha\text{'})} = \frac{r}{r\text{'}}\left(\cos\left(\alpha - \alpha\text{'}\right) + i\sin\left(\alpha - \alpha\text{'}\right)\right)$$

VIII- Exercices

8-1/ Exercice 1

1. Écrire les nombres complexes sous forme algébrique :

$$1\ z_1 = \frac{1}{2-3i}$$
$$2\ z_2 = \frac{1-i}{3+i}$$
$$3\ z_3 = \frac{2i}{1-2i} + \frac{(1+i)^2}{i}$$
$$4\ z_4 = (3+i)(1-5i)$$
$$5\ z_5 = \frac{3-6i}{3+i} + \frac{4}{3-i}$$

8-2/ Exercice 2

1. Donner une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$1\ z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$2\ z_2 = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$$
$$3\ z_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}i$$
$$4\ z_4 = (1-i)\left(-\sqrt{3}+i\right)$$
$$5\ z_5 = \frac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$$
$$6\ z_6 = (1+i)^5$$

8-3/ Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2 - 2i\sqrt{3}$ et $z_B = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $z_C = 8$.

1. Donner une forme trigonométrique des nombres complexes z_A , z_B et z_C .
2. Placer les points A, B et C sur le repère .

On pose : $Z = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$

3. Déterminer $|Z|$ et $arg(Z)$.
4. En déduire la nature du triangle ABC.

8-4/ Exercice 4

On considère dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -\sqrt{2}$ et $z_B = 1 + i$ et $z_C = 1 - i$.

1. Placer les points A, B et C sur un repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
2. Déterminer le module et l'argument de $Z = \frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$.
3. Déduire une mesure de l'angle orienté $\left(\overline{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right)$.
4. Déterminer la forme algébrique puis une forme trigonométrique du quotient $\frac{z_A - z_B}{z_A}$.
5. Déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

8-5/ Exercice 5

Dans le plan complexe, soit $z = x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

On considère le nombre complexe $U = (z - 2i)(\bar{z} - 1)$, et soit M l'image du nombre complexe z.

1. Écrire en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de U.
2. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que U est réel.
3. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que U est imaginaire pur.

8-6/ Exercice 6

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}\right)$.

on considère les points A, B, C, D, E et F qui ont pour affixes $z_A = 2$, $z_B = -2i$, $z_C = 2 + 2i$, $z_D = 3i$, $z_E = -3$ et $z_F = -2 + 2i$

1. Représenter les points A, B, C, D, E et F dans le plan complexe.
2. En utilisant la représentation, déterminer l'argument des complexe z_A, z_B, z_C, z_D, z_E et z_F,