Mathématiques : 2Bac SPC-SVT-Agro-STE-STM

Semestre 1 Devoir 3 Modèle 1

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

I- Exercice 1

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $z^2+2z+2=0$

On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ les points A, B et C d'affixes respectivement $a=-1+i$, $b=1+i$, et $c=\left(1+\sqrt{3}\right)i$.

Soit $M\left(z\right)$ un point du plan complexe et $M'\left(z'\right)$ son image par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

2. Montrer que $z'=-iz$
3. Déduire que le point B est l'image du point A par la rotation R.
4. Montrer que $\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
5. Écrire le nombre complexe $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ sous la forme trigonométrique.
6. Déduire que le triangle ABC est équilatéral.

II- Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1}=\frac{7u_n+4}{2u_n+5} \\ u_0=3 \end{cases}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

1. Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n>2$.

On pose : $(\forall n\in\mathbb{N})\ v_n=\frac{u_n-2}{u_n+1}$

2. Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ u_n=\frac{2+v_n}{1-v_n}$.
3. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et écrire v_n en fonction de n.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n=0$, puis déduire la limite de la suite (u_n).

III- Exercice 3

Partie 1

Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g\left(x\right)=x^2+x+3-3\ln x$.

1. Montrer que $g'\left(x\right)=\frac{(2x+3)(x-1)}{x}$ pour tout x de $]0,+\infty[$
2. Déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $]0,1]$.
3. Déduire que $(\forall x\in]0,+\infty[)\ \ g\left(x\right)>0$

Partie 2

On considère f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x + \left(\frac{x+3}{x}\right)\ln x$.

Soit $\left(\mathscr{C}_f\right)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, puis interprété géométriquement ce résultat.
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.
3. Montrer que la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$.
4. Montrer que $(\forall x \in]0,+\infty[)\ \ f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
5. Donner le tableau de variation de la fonction f.
6. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
7. Déduire que la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ est au dessus de (Δ) sur l'intervalle $[1,+\infty[$, et au dessous de (Δ) sur l'intervalle $]0,1]$.
8. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0,+\infty[$ et que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.
9. Tracer la droite (Δ) et la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.