

### I- Exercice 1

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 + 2z + 2 = 0$

On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectivement  $a = -1 + i$ ,  $b = 1 + i$ , et  $c = (1 + \sqrt{3})i$ .

Soit  $M(z)$  un point du plan complexe et  $M'(z')$  son image par la rotation  $R$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{3\pi}{2}$ .

2. Montrer que  $z' = -iz$
3. Dédire que le point  $B$  est l'image du point  $A$  par la rotation  $R$ .
4. Montrer que  $\frac{a-b}{c-b} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
5. Écrire le nombre complexe  $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  sous la forme trigonométrique.
6. Dédire que le triangle  $ABC$  est équilatéral.

### II- Exercice 2

On considère la suite  $(u_n)$  définie par 
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{7u_n+4}{2u_n+5} \quad (\forall n \in \mathbb{N}). \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

1. Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n > 2$ .

On pose :  $(\forall n \in \mathbb{N}) v_n = \frac{u_n-2}{u_n+1}$

2. Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \frac{2+v_n}{1-v_n}$ .

3. Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{3}$  et écrire  $v_n$  en fonction de  $n$ .

4. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ , puis déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

### III- Exercice 3

#### Partie 1

Soit la fonction  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = x^2 + x + 3 - 3 \ln x$ .

1. Montrer que  $g'(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x}$  pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$
2. Dédire que la fonction  $g$  est croissante sur l'intervalle  $[1, +\infty[$  et décroissante sur l'intervalle  $]0, 1]$ .
3. Dédire que  $(\forall x \in ]0, +\infty[) g(x) > 0$

## Partie 2

On considère  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x + \left(\frac{x+3}{x}\right) \ln x$ .

Soit  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ , puis interprété géométriquement ce résultat.
2. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ .
3. Montrer que la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  admet une branche parabolique de direction la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$  au voisinage de  $+\infty$ .
4. Montrer que  $(\forall x \in ]0, +\infty[) f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .
5. Donner le tableau de variation de la fonction  $f$ .
6. Étudier le signe de  $f(x) - x$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
7. Dédire que la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  est au dessus de  $(\Delta)$  sur l'intervalle  $[1, +\infty[$ , et au dessous de  $(\Delta)$  sur l'intervalle  $]0, 1]$ .
8. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $]0, +\infty[$  et que  $\frac{1}{e} < \alpha < 1$ .
9. Tracer la droite  $(\Delta)$  et la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .