

### I- Exercice 1

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$ .

Soit  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Déterminer  $D_f$  et calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
2. Étudier les branches infinies de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .
3. Étudier la position relative de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  et la droite  $(\Delta)$  d'équation  $(\Delta) : y = x$ .
4. Étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  à droite en 0.
5. Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ .
6. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
7. Construire  $(\Delta)$  et  $(\mathcal{C}_f)$ .

On considère la suite  $(u_n)$  définie par 
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 \\ u_0 = 1 \end{cases} (\forall n \in \mathbb{N}).$$

8. Montrer par récurrence que  $u_n > 1$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ).
9. Montrer que  $(u_n)$  est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.
10. Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .

### II- Exercice 2

On considère la suite  $(u_n)$  définie par 
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 \\ u_0 = 1 \end{cases} (\forall n \in \mathbb{N}).$$

1. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
2. Démontrer que pour tout entier naturel  $n \geq 4$ , on a  $u_n \geq 0$ .
3. En déduire que pour tout entier naturel  $n \geq 5$ , on a  $u_n \geq n - 3$ .
4. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

On définit la suite  $(v_n)$  par  $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ )

5. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
6. En déduire que  $u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ )

Soit la somme  $S_n$  définie par :  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ).

7. Déterminer l'expression de  $S_n$  en fonction de  $n$ .

