Mathématiques : 2 Bac SPC-SVT-STE-STM

Séance 7 (Fonctions primitives)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Primitives d'une fonction numérique

1-1/ Définition

Une fonction F est une primitive d'une fonction f définie sur un intervalle I si :

$$\forall x \in I \ : \ F'(x) = f(x)$$

Exemple

1-2/ Propriété 1

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une fonction primitive sur I.

1-3/ Propriété 2

F est une primitive d'une fonction f définie sur un intervalle I.

Toute fonction primitive G de f sur I est de la forme $G(x) = F(x) + c$; $(c \in \mathbb{R})$.

1-4/ Propriété 3

F est une primitive d'une fonction f définie sur un intervalle I.

Toute fonction primitive G de f sur I est de la forme $G(x) = F(x) + c$; $(c \in \mathbb{R})$.

$x_0 \in I$ *et* $y_0 \in \mathbb{R}$; il existe une seule fonction primitive G de f qui vérifie la condition $G(x_0) = y_0$.

II- Fonctions primitives de la somme de deux fonctions

Propriété

F et G sont les primitives respectivement de f et g sur I.

On a $F + G$ est une primitive de $f + g$.

Exemple

III- Produit d'une fonction par un réel α

Propriété

F est la primitive de f sur I et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a αF est une primitive de αf.

Exemple

IV- Opérations sur les fonctions primitives

$f(x)$	$F(x)$
$u'(x)+v'(x)$	$u(x)+v(x)+\mathrm{k}$
$au'(x)$; $(a \in \mathbb{R})$	$au(x)$
$u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$	$u(x)\times v(x)+\mathrm{k}$
$\frac{-v'(x)}{[v(x)]^2}$	$\frac{1}{v(x)}+\mathrm{k}$
$\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{[v(x)]^2}$	$\frac{u(x)}{v(x)}+\mathrm{k}$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}+\mathrm{k}$
$u'(x)\times[u(x)]^r$; ($r\in\mathbb{Q}^*-\{-1\}$)	$\frac{[u(x)]^{r+1}}{r+1}+\mathrm{k}$
$\frac{u'(x)}{u(x)}+\mathrm{k}$	$\ln\lvert u(x)\rvert+\mathrm{k}$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}+\mathrm{k}$
$\cos(ax+b)$; $(a\neq 0)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+\mathrm{k}$
$\sin(ax+b)$; $(a\neq 0)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+\mathrm{k}$

V- Fonctions primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$F(x)$
$a\in\mathbb{R}$	$ax+k$
x	$\frac{1}{2}x^2+k$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x}+k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+k$
x^r ; $(r\in\mathbb{Q}^*-\{-1\})$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}+k$
$\sin x$	$-\cos x+k$
$\cos x$	$\sin x+k$
$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+k$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+k$
e^x	e^x+k

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

1. Déterminer les fonctions primitives de chacune des fonctions suivantes :

1 $f(x) = 8x^7 - 12x^4 - 14x^3 - 6x + 5$ 2 $f(x) = -4x^5 + \frac{2}{x^2} + 3$ 3 $f(x) = (11x+1)^5$ 4 $f(x) = \frac{20x-6}{(5x^2-3x+2)^8}$ 5 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$	6 $f(x) = \frac{x^8}{\sqrt{4x^9+1}}$ 7 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ 8 $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$ 9 $f(x) = \sqrt[3]{5x-7}$

6-2/ Exercice 2

1. Déterminer la fonctions primitive g de la fonction f tel que g prend la valeur y_0 par g en x_0, pour chaque cas suivant :

$$1 \;\; y_0 = 0 \;\; ; \;\; x_0 = 1 \;\; ; \;\; f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$$
$$2 \;\; y_0 = 1 \;\; ; \;\; x_0 = 0 \;\; ; \;\; f(x) = (x+1)^3$$

6-3/ Exercice 3

1. Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I :

$$1 \;\; f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5 \;\; ; \;\; I = \mathbb{R}$$
$$2 \;\; f(x) = \frac{3}{x^2} \;\; ; \;\; I = \left[1, +\infty\right[$$
$$3 \;\; f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \;\; ; \;\; I = \left[1, +\infty\right[$$
$$4 \;\; f(x) = \frac{1}{x^2} \;\; ; \;\; I = \left]0, +\infty\right[$$
$$5 \;\; f(x) = 3x^2\left(x^3 - 1\right) \;\; ; \;\; I = \mathbb{R}$$
$$6 \;\; f(x) = \frac{2x}{(x^2-3)^3} \;\; ; \;\; I = \left[4, +\infty\right[$$
$$7 \;\; f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \;\; ; \;\; I = \mathbb{R}$$

6-4/ Exercice 4

Soit $f : x \mapsto \frac{x^3-3x^2+7}{(x-2)^2}$ définie sur $I = [3, +\infty[$.

1. Déterminer a, b et c de façon que $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$.
2. Calculer les primitives de f sur $I = [3, +\infty[$.
3. En déduire la primitive F de f sachant que $F(3) = \frac{11}{2}$.

6-5/ Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2}$

1. Déterminer les fonctions primitives de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
2. Déterminer la fonction primitive de la fonction f sur $]0; +\infty[$ tel que $F(1) = 3$.

6-6/ Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{5x^4+40x^2+20x+80}{\left(x^2+4\right)^2}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que : $(\forall x \in \mathbb{R}): \ f(x)=\frac{ax+b}{\left(x^2+4\right)^2}+c$.
2. Déterminer la fonctions primitives F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ tel que : $F(0)=c$.