

Sommaire

I- Primitives d'une fonction numérique

1-1/ Définition

1-2/ Propriété 1

1-3/ Propriété 2

1-4/ Propriété 3

II- Fonctions primitives de la somme de deux fonctions

III- Produit d'une fonction par un réel α

IV- Opérations sur les fonctions primitives

V- Fonctions primitives des fonctions usuelles

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

6-5/ Exercice 5

6-6/ Exercice 6

I- Primitives d'une fonction numérique

1-1/ Définition

Une fonction F est une primitive d'une fonction f définie sur un intervalle I si :

$$\forall x \in I : F'(x) = f(x)$$

Exemple

1-2/ Propriété 1

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une fonction primitive sur I .

1-3/ Propriété 2

F est une primitive d'une fonction f définie sur un intervalle I .

Toute fonction primitive G de f sur I est de la forme $G(x) = F(x) + c$; ($c \in \mathbb{R}$).

1-4/ Propriété 3

F est une primitive d'une fonction f définie sur un intervalle I .

Toute fonction primitive G de f sur I est de la forme $G(x) = F(x) + c$; ($c \in \mathbb{R}$).

$x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$; il existe une seule fonction primitive G de f qui vérifie la condition $G(x_0) = y_0$.

II- Fonctions primitives de la somme de deux fonctions

Propriété

F et G sont les primitives respectivement de f et g sur I .

On a $F + G$ est une primitive de $f + g$.

Exemple

III- Produit d'une fonction par un réel α

Propriété

F est la primitive de f sur I et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a αF est une primitive de αf .

Exemple

IV- Opérations sur les fonctions primitives

$f(x)$	$F(x)$
$u'(x) + v'(x)$	$u(x) + v(x) + k$
$au'(x) ; (a \in \mathbb{R})$	$au(x)$
$u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$	$u(x) \times v(x) + k$
$\frac{-v'(x)}{[v(x)]^2}$	$\frac{1}{v(x)} + k$
$\frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{[v(x)]^2}$	$\frac{u(x)}{v(x)} + k$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + k$
$u'(x) \times [u(x)]^r ; (r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{[u(x)]^{r+1}}{r+1} + k$
$\frac{u'(x)}{u(x)} + k$	$\ln u(x) + k$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k$
$\cos(ax + b) ; (a \neq 0)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + k$
$\sin(ax + b) ; (a \neq 0)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + k$

V- Fonctions primitives des fonctions usuelles

$f(x)$	$F(x)$
$a \in \mathbb{R}$	$ax + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
$x^r ; (r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + k$
e^x	$e^x + k$

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

1. Déterminer les fonctions primitives de chacune des fonctions suivantes :

$$1 \quad f(x) = 8x^7 - 12x^4 - 14x^3 - 6x + 5$$

$$2 \quad f(x) = -4x^5 + \frac{2}{x^2} + 3$$

$$3 \quad f(x) = (11x + 1)^5$$

$$4 \quad f(x) = \frac{20x-6}{(5x^2-3x+2)^8}$$

$$5 \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

$$6 \quad f(x) = \frac{x^8}{\sqrt{4x^9+1}}$$

$$7 \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$8 \quad f(x) = \sqrt[3]{x^5}$$

$$9 \quad f(x) = \sqrt[3]{5x-7}$$

6-2/ Exercice 2

1. Déterminer la fonction primitive g de la fonction f tel que g prend la valeur y_0 par g en x_0 , pour chaque cas suivant :

$$1 \quad y_0 = 0 ; \quad x_0 = 1 ; \quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$$

$$2 \quad y_0 = 1 ; \quad x_0 = 0 ; \quad f(x) = (x + 1)^3$$

6-3/ Exercice 3

1. Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I :

$$1 \quad f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5 ; \quad I = \mathbb{R}$$

$$2 \quad f(x) = \frac{3}{x^2} ; \quad I = [1, +\infty[$$

$$3 \quad f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} ; \quad I = [1, +\infty[$$

$$4 \quad f(x) = \frac{1}{x^2} ; \quad I =]0, +\infty[$$

$$5 \quad f(x) = 3x^2(x^3 - 1) ; \quad I = \mathbb{R}$$

$$6 \quad f(x) = \frac{2x}{(x^2-3)^3} ; \quad I = [4, +\infty[$$

$$7 \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} ; \quad I = \mathbb{R}$$

6-4/ Exercice 4

Soit $f : x \mapsto \frac{x^3-3x^2+7}{(x-2)^2}$ définie sur $I = [3, +\infty[$.

1. Déterminer a , b et c de façon que $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$.

2. Calculer les primitives de f sur $I = [3, +\infty[$.

3. En déduire la primitive F de f sachant que $F(3) = \frac{11}{2}$.

6-5/ Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2}$

1. Déterminer les fonctions primitives de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

2. Déterminer la fonction primitive de la fonction f sur $]0; +\infty[$ tel que $F(1) = 3$.

6-6/ Exercice 6

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{5x^4+40x^2+20x+80}{(x^2+4)^2}$.

1. Déterminer les réels a , b et c tels que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = \frac{ax+b}{(x^2+4)^2} + c$.
2. Déterminer la fonctions primitives F de la fonction f sur \mathbb{R} tel que : $F(0) = c$.