

Sommaire

## I- Généralité sur les suites

1-1/ Suite majorée – suite minorée – suite bornée

1-2/ La monotonie d'une suite

## II- Suite arithmétique

2-1/ Définition

2-2/ La somme  $S_n$ 

2-3/ Caractéristiques

## III- Suite géométrique

3-1/ Définition

3-2/ La somme  $S_n$ 

3-3/ Caractéristiques

## IV- Limites d'une suite numérique

4-1/ Limite finie d'une suite

4-2/ Limite infinie d'une suite

4-3/ Convergence d'une suite numérique

## V- Opérations sur les limites des suites

## VI- Critères de convergences

## VII- Suites particulières

7-1/ Suite de la forme  $u_n = q^n$  avec  $q \in \mathbb{R}$ 7-2/ Suite de la forme  $u_n = n^r$  avec  $r \in \mathbb{Q}^*$ 7-3/ Suite de la forme  $v_n = f(u_n)$ 7-4/ Suite de la forme  $u_{n+1} = f(u_n)$ 

## IIX- Exercices

8-1/ Exercice 1

8-2/ Exercice 2

8-3/ Exercice 3

8-4/ Exercice 4

8-5/ Exercice 5

8-6/ Exercice 6

---

## I- Généralité sur les suites

1-1/ Suite majorée – suite minorée – suite bornée

### Définitions

Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est majorée par un réel  $M$  si et seulement si

$$\forall n \geq n_0 ; u_n \leq M \text{ (ou } u_n < M)$$

Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est minorée par un réel  $m$  si et seulement si

$$\forall n \geq n_0 ; u_n \geq m \text{ (ou } u_n > m)$$

Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est bornée si et seulement si  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est majorée et minorée .

### Exemples

1-2/ La monotonie d'une suite

### Définitions

Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est croissante si et seulement si  $\forall n \geq n_0 ; u_n \leq u_{n+1}$

Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est strictement croissante si et seulement si  $\forall n \geq n_0 ; u_n < u_{n+1}$

Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est décroissante si et seulement si  $\forall n \geq n_0 ; u_n \geq u_{n+1}$

Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est strictement décroissante si et seulement si  $\forall n \geq n_0 ; u_n > u_{n+1}$

Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est constante si et seulement si  $\forall n \geq n_0 ; u_n = u_{n+1}$

### Exemples

## II- Suite arithmétique

2-1/ Définition

Soient  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite numérique et  $r$  un nombre réel non nul.

La suite  $(u_n)$  est arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_{n_0}$  équivaut à

$$\forall n \geq n_0 ; u_{n+1} - u_n = r \text{ (} u_{n+1} = u_n + r)$$

La suite  $(u_n)$  est arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_{n_0}$  équivaut à

$$\forall n \geq n_0 ; u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$$

2-2/ La somme  $S_n$

Soit la somme suivante :

$$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$$

On a :

$$S_n = \left[ \frac{u_n + u_p}{2} \right] \times (n - p + 1)$$

Ou :

$$S_n = \left[ \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2} \right] \times (\text{nombre de termes})$$

## 2-3/ Caractéristiques

### Propriété caractéristique

$$\forall p \geq n_0 ; \forall q \geq n_0 ; u_q = u_p + (q - p)r ; (p, q \in \mathbb{N})$$

### Moyenne arithmétique

$u_i = a$  et  $u_{i+1} = b$  et  $u_{i+2} = c$  sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison  $r$ , on a  $a + c = 2b$

### Exemple

## III- Suite géométrique

### 3-1/ Définition

Soient  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite numérique et  $q$  un nombre réel non nul.

La suite  $(u_n)$  est géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_{n_0}$  équivaut à

$$\forall n \geq n_0 ; u_{n+1} = q \cdot u_n$$

La suite  $(u_n)$  est géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_{n_0}$  équivaut à

$$\forall n \geq n_0 ; u_n = u_{n_0} \cdot q^{(n-n_0)}$$

### Exemples

### 3-2/ La somme $S_n$

Soit la somme suivante :

$$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$$

Si  $q \neq 1$ , on a :

$$S_n = \left[ \frac{q^{(n-p+1)} - 1}{q - 1} \right] \times u_p$$

Si  $q = 1$ , on a :

$$S_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_p = (n - p + 1)u_p$$

### 3-3/ Caractéristiques

### Propriété caractéristique

$$\forall p \geq n_0 ; \forall n \geq n_0 ; u_p = u_n \times q^{p-n} ; (p, n \in \mathbb{N})$$

### Moyenne géométrique

$u_i = a$  et  $u_{i+1} = b$  et  $u_{i+2} = c$  sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison  $r$ , on a  $a \times c = b^2$

### Exemple

## IV- Limites d'une suite numérique

### 4-1/ Limite finie d'une suite

#### Définition

$(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite numérique.

On dit que la limite de la suite  $(u_n)$  est le nombre réel  $l$  si pour tout intervalle ouvert  $I_l$  et de centre  $l$  contient tous les termes de la suite  $(u_n)$  à partir d'un certain rang.

On note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

#### Propriétés

Si une suite a une limite alors cette limite est unique.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^i} = 0 \text{ (} i \in \mathbb{N}^* \text{)} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

#### Exemple

### 4-2/ Limite infinie d'une suite

#### Définition

$(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite numérique.

On dit que la limite de la suite  $(u_n)$  est  $+\infty$  si pour tout  $A$  de  $\mathbb{R}^+$  l'intervalle  $]A; +\infty[$  contient tous les termes de la suite  $(u_n)$  à partir d'un certain rang.

- On note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

On dit que la limite de la suite  $(u_n)$  est  $-\infty$  si pour tout  $A$  de  $\mathbb{R}^-$  l'intervalle  $] -\infty; A[$  contient tous les termes de la suite  $(u_n)$  à partir d'un certain rang.

- On note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

#### Propriétés

Si une suite a une limite alors cette limite est unique.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^i = +\infty \text{ (} i \in \mathbb{N}^* \text{)} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

#### Exemple

### 4-3/ Convergence d'une suite numérique

#### Définition

$(u_n)_{n \geq n_0}$  est une suite numérique.

Si la limite de la suite  $(u_n)$  est finie on dit que la suite  $(u_n)$  est convergente.

Si la limite de la suite  $(u_n)$  est infinie ou la suite  $(u_n)$  n'a pas de limite on dit que la suite est divergente.

#### Propriétés

Toute suite croissante et majorée est une suite convergente.

Toute suite décroissante et minorée est une suite convergente.

### Exemple

## V- Opérations sur les limites des suites

### Propriété

Soient  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et  $(v_n)_{n \geq n_0}$  deux suites numériques.

Les opérations sur les suites sont les mêmes que les opération des fonctions.

- Exemple :  $(u_n)_{n \geq n_0} + (v_n)_{n \geq n_0} = (u_n + v_n)_{n \geq n_0}$

Les propriétés des opérations des limites des suites sont les mêmes que celles des fonctions.

1. Exemple 1 : Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l'$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n + v_n = l + l'$

2. Exemple 2 : Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n + v_n = +\infty$

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$  et  $u_n > 0$  alors  $l > 0$

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l'$  et  $v_n \leq u_n$  alors  $l' \leq l$

### Exemple

## VI- Critères de convergences

### Critères

Soient  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et  $(v_n)_{n \geq n_0}$  et  $(w_n)_{n \geq n_0}$  trois suites numériques tel que à partir d'un rang  $p$  on a pour tout  $n \geq p \geq n_0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $\alpha > 0$  et  $l \in \mathbb{R}$

1. Si  $v_n \leq u_n \leq w_n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = l$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$

2. Si  $v_n \geq \alpha \cdot u_n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$

3. Si  $v_n \leq \alpha \cdot u_n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -\infty$

4. Si  $|v_n - l| \leq \alpha \cdot u_n$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$

### Exemple

## VII- Suites particulières

7-1/ Suite de la forme  $u_n = q^n$  avec  $q \in \mathbb{R}$

### Propriété

Si  $q > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

Si  $q = 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$

Si  $-1 < q < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

Si  $q \leq -1$  alors  $(u_n)$  n'a pas de limite.

### Exemple

## 7-2/ Suite de la forme $u_n = n^r$ avec $r \in \mathbb{Q}^*$

### Propriété

Si  $r > 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

Si  $r < 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

### Exemple

## 7-3/ Suite de la forme $v_n = f(u_n)$

### Propriété

Si une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  converge vers  $l$  (c.à.d.  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ ) et  $f$  est une fonction continue en  $l$  alors la suite  $(v_n)_{n \geq n_0}$  définie par  $v_n = f(u_n)$  est convergente vers  $f(l)$  (c.à.d.  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = f(l)$ )

### Exemple

## 7-4/ Suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

### Définition

Soit une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  tel que  $\forall n \geq n_0 ; u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f$  est une fonction.

Si on a :

- $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$ .
- $f(I) \subset I$
- $u_{n_0} \in I$  (le premier terme).
- La suite  $(u_n)$  est convergente (vers  $l \in \mathbb{R}$ ).

Alors  $l$  est solution de l'équation  $x \in I ; f(x) = x$  (c.à.d.  $l$  vérifie  $l = f(l)$ ).

### Exemple

## IIIX- Exercices

### 8-1/ Exercice 1

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 7 ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que  $u_n < 14$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

On considère la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = 14 - u_n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

2. Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ , puis écrire  $v_n$  en fonction de  $n$ .
3. En déduire que  $u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , puis calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .

### 8-2/ Exercice 2

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que  $u_n < 5$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .
2. Vérifier que  $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , puis en déduire que  $(u_n)$  est croissante.
3. En déduire que  $(u_n)$  est convergente.

On considère la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = 5 - u_n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

4. Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{2}{5}$ , puis écrire  $v_n$  en fonction de  $n$ .
5. Montrer que  $u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , puis calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .

### 8-3/ Exercice 3

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3+u_n}{5-u_n}; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Vérifier que  $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , puis démontrer par récurrence que  $u_n < 3$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

On considère la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = \frac{u_n-1}{3-u_n}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

2. Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ , puis en déduire que  $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .
3. Montrer que  $u_n = \frac{1+3v_n}{1+u_n}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , puis écrire  $u_n$  en fonction de  $n$ .
4. Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .

### 8-4/ Exercice 4

#### Partie 1

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :  $f(x) = \left(\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right)^2$

1. Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de la fonction  $f$ , puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
2. Étudier la dérivabilité de  $f$  en à droite et interpréter le résultat géométriquement.
3. Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x > 0$ .
4. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
5. Étudier les positions relatives de  $(\mathcal{C}_f)$  et la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$ .

#### Partie 2

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n); \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 4$ .
2. Déterminer le sens des variations de la suite  $(u_n)$ .
3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

#### Partie 3

Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = 1 - \frac{2}{\sqrt{u_n}}$

1. Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique et déterminer sa raison.
2. Calculer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
3. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### 8-5/ Exercice 5

Soit  $(u_n)$  la suite réelle définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{\sqrt{3+u_n^2}}$ .

1. Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$
2. Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} \geq \frac{1+u_n}{2}$
3. Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .
4. Vérifier que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2} (1 - u_n)$
5. En déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
6. Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .

### 8-5/ Exercice 6

Soit  $(u_n)$  la suite réelle définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n}{2+u_n}$ .

1. Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq 0$
2. Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n(1+u_n)}{2+u_n}$
3. Étudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .

Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ .

4. Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 1.
5. Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
6. Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .