Mathématiques : 2 Bac SPC-SVT-STE-STM

Séance 6 (Limite d'une suite)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Généralité sur les suites

1-1/ Suite majorée – suite minorée – suite bornée

Définitions

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée par un réel M si et seulement si
$\forall n \geq n_0\ ;\ u_n \leq M\ \ (ou\ u_n < M)$

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est minorée par un réel m si et seulement si
$\forall n \geq n_0\ ;\ u_n \geq m\ \ (ou\ u_n > m)$

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée si et seulement si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée et minorée .

Exemples

1-2/ La monotonie d'une suite

Définitions

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est croissante si et seulement si $\forall n \geq n_0\ ;\ u_n \leq u_{n+1}$

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement croissante si et seulement si $\forall n \geq n_0\ ;\ u_n < u_{n+1}$

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante si et seulement si $\forall n \geq n_0\ ;\ u_n \geq u_{n+1}$

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est strictement décroissante si et seulement si $\forall n \geq n_0\ ;\ u_n > u_{n+1}$

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est constante si et seulement si $\forall n \geq n_0\ ;\ u_n = u_{n+1}$

Exemples

II- Suite arithmétique

2-1/ Définition

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique et r un nombre réel non nul.

La suite (u_n) est arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} équivaut à
$\forall n \geq n_0\ ;\ u_{n+1} - u_n = r\ \ (u_{n+1} = u_n + r)$

La suite (u_n) est arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} équivaut à
$\forall n \geq n_0\ ;\ u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$

2-2/ La somme S_n

Soit la somme suivante :

$$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_n$$

On a :

$$S_n = \left[\frac{u_n + u_p}{2}\right] \times (n - p + 1)$$

Ou :

$$S_n = \left[\frac{1er\ terme + dernier\ terme}{2}\right] \times (nombre\ de\ termes)$$

2-3/ Caractéristiques

Propriété caractéristique

$$\forall p \geq n_0\ ;\ \forall q \geq n_0\ ;\ u_q = u_p + (q - p)r\ ;\ \ (p, q \in \mathbb{N})$$

Moyenne arithmétique

$u_i = a$ et $u_{i+1} = b$ et $u_{i+2} = c$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r, on a $a + c = 2b$

Exemple

III- Suite géométrique

3-1/ Définition

Soient $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique et q un nombre réel non nul.

La suite (u_n) est géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} équivaut à
$\forall n \geq n_0\ ;\ u_{n+1} = q.\, u_n$

La suite (u_n) est géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} équivaut à
$\forall n \geq n_0\ ;\ u_n = u_{n_0}.\, q^{(n - n_0)}$

Exemples

3-2/ La somme S_n

Soit la somme suivante :

$$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_n$$

Si $q \neq 1$,on a :

$$S_n = \left[\frac{q^{(n-p+1)} - 1}{q - 1}\right] \times u_p$$

Si $q = 1$,on a :

$$S_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_p = (n - p + 1)u_p$$

3-3/ Caractéristiques

Propriété caractéristique

$$\forall p \geq n_0\ ;\ \forall n \geq n_0\ ;\ u_p = u_n \times q^{p-n}\ ;\ \ (p, n \in \mathbb{N})$$

Moyenne géométrique

$u_i = a$ et $u_{i+1} = b$ et $u_{i+2} = c$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r, on a $a \times c = b^2$

Exemple

IV- Limites d'une suite numérique

4-1/ Limite finie d'une suite

Définition

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique.

On dit que la limite de la suite (u_n) est le nombre réel l si pour tout intervalle ouvert I_l et de centre l contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

Propriétés

Si une suite a une limite alors cette limite est unique.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^i} = 0$ $(i \in \mathbb{N}^*)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

Exemple

4-2/ Limite infinie d'une suite

Définition

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique.

On dit que la limite de la suite (u_n) est $+\infty$ si pour tout A de $\mathbb{R}^+$ l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

- On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

On dit que la limite de la suite (u_n) est $-\infty$ si pour tout A de $\mathbb{R}^-$ l'intervalle $]-\infty; A[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

- On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Propriétés

Si une suite a une limite alors cette limite est unique.

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^i = +\infty$ $(i \in \mathbb{N}^*)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Exemple

4-3/ Convergence d'une suite numérique

Définition

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique.

Si la limite de la suite (u_n) est finie on dit que la suite (u_n) est convergente.

Si la limite de la suite (u_n) est infinie ou la suite (u_n) n'a pas de limite on dit que la suite est divergente.

Propriétés

Toute suite croissante et majorée est une suite convergente.

Toute suite décroissante et minorée est une suite convergente.

Exemple

V- Opérations sur les limites des suites

Propriété

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites numériques.

Les opérations sur les suites sont les mêmes que les opération des fonctions.

- Exemple : $(u_n)_{n\geq n_0} + (v_n)_{n\geq n_0} = (u_n + v_n)_{n\geq n_0}$

Les propriétés des opérations des limites des suites sont les mêmes que celles des fonctions.

1. Exemple 1 : Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \text{l}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \text{l'}$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n + v_n = \text{l} + \text{l'}$
2. Exemple 2 : Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \text{l}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n + v_n = +\infty$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \text{l}$ et $u_n > 0$ alors $\text{l} > 0$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \text{l}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \text{l'}$ et $v_n \leq u_n$ alors $\text{l'} \leq \text{l}$

Exemple

VI- Critères de convergences

Critères

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ trois suites numériques tel que à partir d'un rang p on a pour tout $n \geq p \geq n_0$ $(n \in \mathbb{N})$, $\alpha > 0\ et\ \text{l} \in \mathbb{R}$

1. Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = \text{l}$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \text{l}$
2. Si $v_n \geq \alpha.u_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$
3. Si $v_n \leq \alpha.u_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$
4. Si $|v_n - \text{l}| \leq \alpha.u_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \text{l}$

Exemple

VII- Suites particulières

7-1/ Suite de la forme $u_n = q^n$ avec $q \in \mathbb{R}$

Propriété

Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$

Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

Si $q \leq -1$ alors (u_n) n'a pas de limite.

Exemple

7-2/ Suite de la forme $u_n = n^r$ avec $r \in \mathbb{Q}^*$

Propriété

Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty$

Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$

Exemple

7-3/ Suite de la forme $v_n = f(u_n)$

Propriété

Si une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers l (c.à.d. $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = l$) et f est une fonction continue en l alors la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ définie par $v_n = f(u_n)$ est convergente vers $f(l)$ (c.à.d. $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = f(l)$)

Exemple

7-4/ Suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition

Soit une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ tel que $\forall n \geq n_0$; $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f est une fonction.

Si on a :

- f est une fonction continue sur un intervalle I.
- $f(I) \subset I$
- $u_{n_0} \in I$ (le premier terme).
- La suite (u_n) est convergente (vers $l \in \mathbb{R}$).

Alors l est solution de l'équation $x \in I$; $f(x) = x$ (c.à.d. l vérifie $l = f(l)$).

Exemple

IIX- Exercices

8-1/ Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 7 \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que $u_n < 14$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

On considère la suite (v_n) définie par $v_n = 14 - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, puis écrire v_n en fonction de n.
3. En déduire que $u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$, puis calculer la limite de la suite (u_n).

8-2/ Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5} u_n + 3 \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que $u_n < 5$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
2. Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}(5 - u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, puis en déduire que (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) est convergente.

On considère la suite (v_n) définie par $v_n = 5 - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

4. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$, puis écrire v_n en fonction de n.
5. Montrer que $u_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$, puis calculer la limite de la suite (u_n).

8-3/ Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3+u_n}{5-u_n} \; ; \; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Vérifier que $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_{n)}}$ pour tout n de $\mathbb{N}$, puis démontrer par récurrence que $u_n < 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n-1}{3-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, puis en déduire que $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
3. Montrer que $u_n = \frac{1+3v_n}{1+u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$, puis écrire u_n en fonction de n.
4. Calculer la limite de la suite (u_n).

8-4/ Exercice 4

Partie 1

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \left(\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\right)^2$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f, puis calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Étudier la dérivabilité de f en à droite et interpréter le résultat géométriquement.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Étudier les positions relatives de $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (Δ) d'équation $y = x$.

Partie 2

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \; ; \; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \; 0 \leq u_n \leq 4$.
2. Déterminer le sens des variations de la suite (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie 3

Soit (v_n) la suite définie par $(\forall n \in \mathbb{N}) : \; v_n = 1 - \frac{2}{\sqrt{u_n}}$

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.
2. Calculer v_n puis u_n en fonction de n.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

8-5/ Exercice 5

Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{\sqrt{3+{u_n}^2}}$.

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) :\ 0 \leq u_n \leq 1$
2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) :\ u_{n+1} \geq \frac{1+u_n}{2}$
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
4. Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) :\ 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(1-u_n)$
5. En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) :\ u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
6. Calculer la limite de la suite (u_n).

8-5/ Exercice 6

Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2+u_n}$.

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) :\ u_n \geq 0$
2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) :\ u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n(1+u_n)}{2+u_n}$
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

Soit (v_n) la suite définie par $(\forall n \in \mathbb{N}) :\ v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.

4. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 1.
5. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
6. Calculer la limite de la suite (u_n).