

Sommaire

I- Applications de la fonction dérivée première

1-1/ La monotonie d'une fonction et le signe de sa fonction dérivée

1-2/ Extremums d'une fonction dérivable

II- Applications de la fonction dérivée seconde

2-1/ Position relative de la tangente et la courbe – la concavité

2-2/ Points d'inflexions

III- Centre de symétrie – axe de symétrie de la courbe d'une fonction

3-1/ Centre de symétrie de la courbe d'une fonction

3-2/ Axe de symétrie de la courbe d'une fonction

IV- Branches infinies d'une fonction

4-1/ Branches infinies

4-2/ Asymptote verticale

4-3/ Asymptote horizontale

4-4/ Asymptote oblique

V- Bilan des branches infinies

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

6-5/ Exercice 5

6-6/ Exercice 6

---

## I- Applications de la fonction dérivée première

### 1-1/ La monotonie d'une fonction et le signe de sa fonction dérivée

#### Propriété

$f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$

Si la fonction dérivée  $f'$  est strictement positive sur  $I$ , alors la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .

(même si  $f'$  s'annule en un points fini de  $I$ , ça ne change pas la monotonie de  $f$ )

Si la fonction dérivée  $f'$  est strictement négative sur  $I$ , alors la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

(même si  $f'$  s'annule en un points fini de  $I$ , ça ne change pas la monotonie de  $f$ )

Si la fonction  $f'$  est nulle sur  $I$  tout entier, alors  $f$  est constante.

#### Exemple

### 1-2/ Extremums d'une fonction dérivable

#### Propriété 1

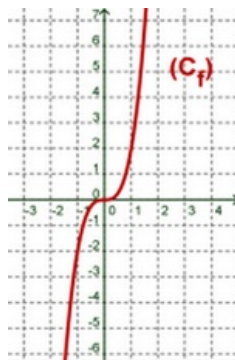
$f$  est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ ,  $a$  est un élément de  $I$ .

Si  $f$  est dérivable au point  $a$  et admet un extremum au point  $a$  alors  $f'(a) = 0$ .

#### Remarque

$f'(a) = 0$  ne signifie pas que  $f(a)$  est un extremum de la fonction  $f$ .

#### Exemple



#### Propriété 2

$f$  est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ ,  $a$  est un élément de  $I$ .

Si  $f'$  s'annule au point  $a$  et  $f'$  change de signe au voisinage de  $a$  alors  $f(a)$  est un extremum de la fonction  $f$ .

#### Exemple

## II- Applications de la fonction dérivée seconde

### 2-1/ Position relative de la tangente et la courbe – la concavité

#### Propriété et définition

$f$  est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ .

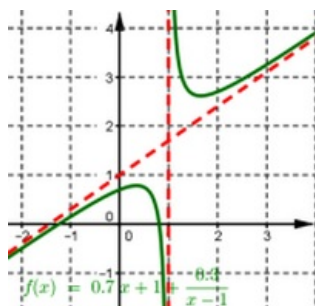
Si  $\forall x \in I : f''(x) > 0$ , alors la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  est située au dessus des tangentes des points  $x$  tel que  $x \in I$ .

Dans ce cas on dit que la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  de  $f$  est convexe (ou sa concavité est dans le sens des ordonnées positives. On note  $\cup$ ).

Si  $\forall x \in I : f''(x) < 0$ , alors la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  est située au dessous des tangentes des points  $x$  tel que  $x \in I$ .

Dans ce cas on dit que la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  de  $f$  est concave (ou sa concavité est dans le sens des ordonnées négatives. On note  $\cap$ ).

### Exemple



## 2-2/ Points d'inflexions

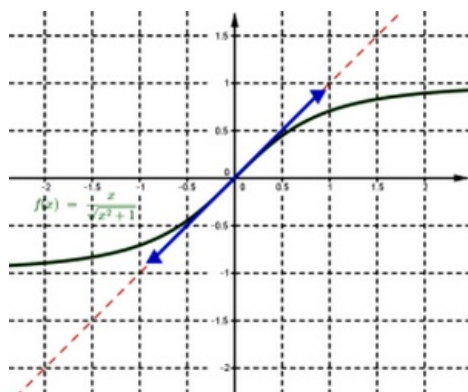
### Propriété et définition

$f$  est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ , et  $x_0 \in I$ .

Si la fonction dérivée seconde  $f''$  s'annule en  $x_0$  et  $f''$  change de signe au voisinage de  $x_0$ , alors le point  $A(x_0, f(x_0))$  est un point d'inflexion au courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .

Dans ce cas la tangente au point  $A(x_0, f(x_0))$  coupe (ou traverse) la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .

### Exemple



## III- Centre de symétrie – axe de symétrie de la courbe d'une fonction

### 3-1/ Centre de symétrie de la courbe d'une fonction

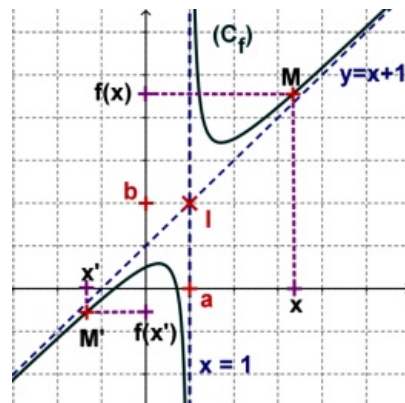
#### Propriété

Soit  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative d'une fonction définie sur  $D_f$  dans un plan  $(P)$  rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Le point  $I(a, b)$  est centre de symétrie de la courbe

$$(\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f ; 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f ; f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$$

### Exemple



## 3-2/ Axe de symétrie de la courbe d'une fonction

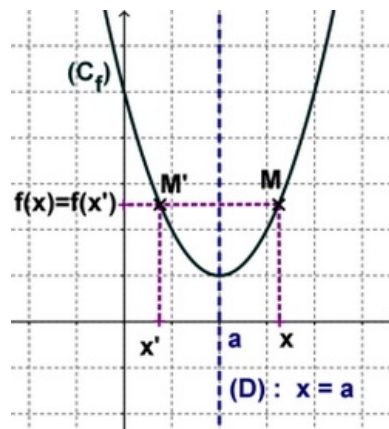
### Propriété

Soit  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative d'une fonction définie sur  $D_f$  dans un plan  $(P)$  rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

La droite d'équation  $D : x = a$  est axe de symétrie de la courbe

$$(\mathcal{C}_f) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f ; 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f ; f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

### Exemple



## IV- Branches infinies d'une fonction

### 4-1/ Branches infinies

#### Définition

Soit  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative d'une fonction définie sur  $D_f$  dans un plan  $(P)$  rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Si au moins une des coordonnées d'un point  $M$  de la courbe de  $(\mathcal{C}_f)$  tend vers l'infinie, on dit que la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  admet une branche infinie.

### Exemple

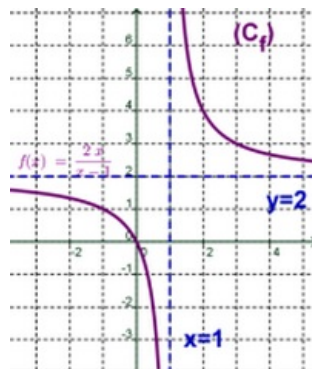
#### 4-2/ Asymptote verticale

##### Définition

Soit  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative d'une fonction définie sur  $D_f$  dans un plan  $(P)$  rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ , alors la droite d'équation  $x = a$  est une asymptote verticale à  $(\mathcal{C}_f)$  (à droite de  $a$  ou à gauche de  $a$ ).

### Exemple



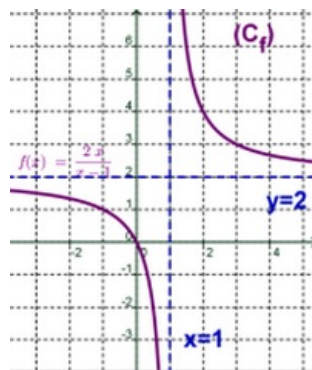
#### 4-3/ Asymptote horizontale

##### Définition

Soit  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative d'une fonction définie sur  $D_f$  dans un plan  $(P)$  rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  (ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$ ), alors la droite d'équation  $y = b$  (ou  $y = c$ ) est une asymptote horizontale à  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $+\infty$  (ou  $-\infty$ )

### Exemple



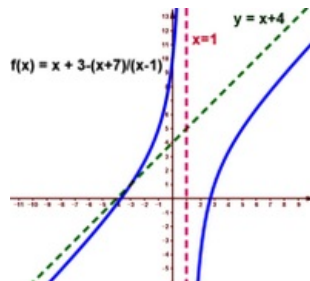
#### 4-4/ Asymptote oblique

##### Définition

Soit  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative d'une fonction définie sur  $D_f$  (tel que  $]a, +\infty[ \subset D_f$  ou  $]-\infty, a[ \subset D_f$ ) dans un plan  $(P)$  rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ , alors la droite d'équation  $y = ax + b$  est une asymptote oblique à  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $\pm\infty$ .

### Exemple



### Propriétés

Si la droite d'équation  $y = ax + b$  est une asymptote oblique à  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $\pm\infty$ , donc pour déterminer  $a$  et  $b$  on calcule les limites suivantes :

Pour déterminer  $a$  on calcule  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$

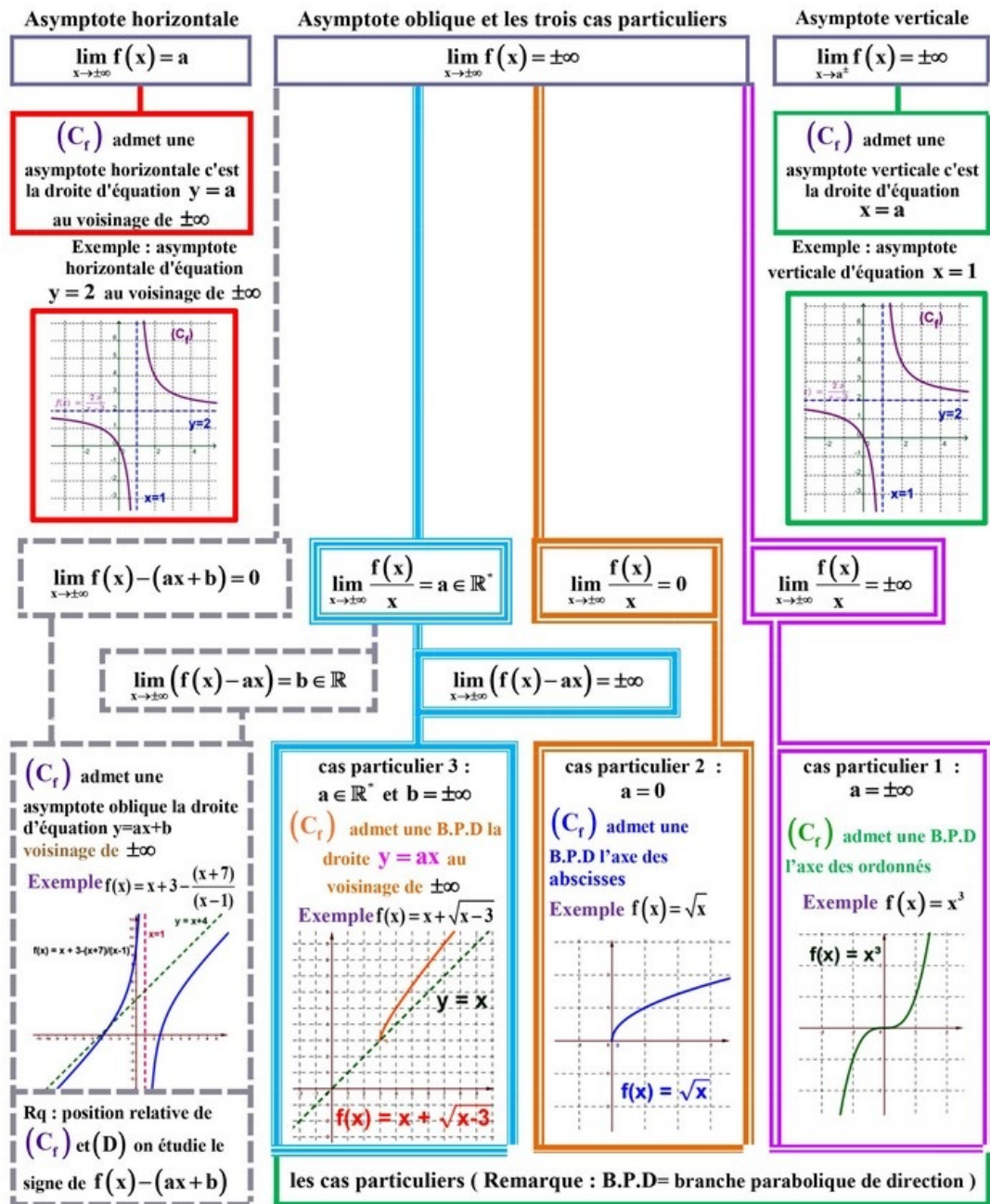
Pour déterminer  $b$  on calcule  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R} \ (b \neq \pm\infty)$

Les cas particuliers :

- 1er cas particulier :  $a = \pm\infty$ , on dit que  $(\mathcal{C}_f)$  admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnés.
- 2nd cas particulier :  $a = 0$ , on dit que  $(\mathcal{C}_f)$  admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses .
- 3ème cas particulier :  $b = \pm\infty$  avec  $a \in \mathbb{R}^*$ , on dit que  $(\mathcal{C}_f)$  admet une branche parabolique de direction la droite d'équation  $y = ax$ .

### Exemples

## V- Bilan des branches infinies



## VI- Exercices

### 6-1/ Exercice 1

On considère la fonction numérique  $f$  définie par  $f(x) = x + \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ , et soit  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité de 1 cm).

1.
  - a- Déterminer  $D_f$  le domaine de définition de la fonction  $f$ .
  - b- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ , puis interpréter géométriquement le deuxième résultat.
  - c- Montrer que la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  admet une asymptote oblique  $(\Delta)$  au voisinage de  $+\infty$  dont on déterminera son équation.
  - d- Étudier la position relative de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  et la droite  $(\Delta)$ .
- 2.



- a- Montrer que  $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}$  pour tout  $x$  de  $D_f$ .
- b- Montrer que pour tout  $x$  de  $] -1, 0]$  on a  $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}} \geq 1$ , puis en déduire le signe de  $f'(x)$  sur  $] -1, 0]$ .
- c- Montrer que pour tout  $x$  de  $[0, +\infty[$  on a  $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}} \leq 1$ , puis en déduire le signe de  $f'(x)$  sur  $[0, +\infty[$ .
- d- Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $D_f$ .
- e- Donner l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  au point  $x_0 = 0$ .

4. Construire la droite  $(\Delta)$  et la tangente  $(T)$  et la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  de  $f$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

5.

- a- Montrer que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur l'intervalle  $J$  qu'on déterminera.
- b- Montrer que la fonction réciproque  $f^{-1}$  est dérivable sur l'intervalle  $J$ .
- c- Construire dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe représentative  $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$  de la fonction  $f^{-1}$ .

## 6-2/ Exercice 2

On considère la fonction numérique  $f$  définie par  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ , et soit  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité de 2 cm).

1.

- a- Montrer que  $f$  est définie sur  $D_f = \mathbb{R}$ .
- b- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , puis interpréter géométriquement les deux résultats.

2.

- a- Montrer que  $f'(x) = \frac{1}{(x^2-2x+2)\sqrt{x^2-2x+2}}$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .
- b- Montrer que la fonction  $f$  est croissante sur  $D_f$ .
- c- Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

3.

- a- Montrer que le point  $I(1; 0)$  est un centre de symétrie de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ .
- b- Donner l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  au point  $I$ .

4. Construire la tangente  $(T)$  et la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  de  $f$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

5.

- a- Montrer que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur l'intervalle  $J$  qu'on déterminera.



b- Construire dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe représentative  $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$  de la fonction  $f^{-1}$ .

c- Calculer  $f(1)$ , puis montrer que la fonction réciproque  $f^{-1}$  est dérivable en 0 puis calculer  $(f^{-1})'(0)$ .

### 6-3/ Exercice 3

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} ; x \in [0, 1[ \cup ]1, +\infty[ \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soit  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité de 2 cm).

1.

a- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , puis interpréter géométriquement le résultat.

b- Étudier la continuité de la fonction  $f$  au point  $x_0 = 1$ .

2.

a- Montrer que la fonction  $f$  est dérivable au point  $x_0 = 1$  et le nombre dérivé est  $f'(1) = -\frac{1}{8}$ .

b- Donner l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  au point  $x_0 = 1$ .

c- Étudier la dérivabilité à droite de la fonction  $f$  au point  $x_0 = 0$ .

d- Vérifier la fonction dérivée de  $f$  sur  $]0, +\infty[ \setminus \{1\}$  est  $f'(x) = \frac{-(\sqrt{x-1})^2}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$ .

e- Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $[0, +\infty[$ .

3. Construire la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  de  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère  $g$  la restriction de la fonction  $f$  sur  $I = [0, +\infty[$ .

4) a- Montrer que la fonction  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur l'intervalle  $J$  qu'on déterminera.

4) b- Calculer  $g(4)$  puis montrer que la fonction réciproque  $g^{-1}$  est dérivable en  $\frac{1}{3}$  puis calculer  $(g^{-1})'(\frac{1}{3})$ .

### 6-4/ Exercice 4

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $D_f = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, +\infty[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^4}{x^3+x^2} ; x \neq -1 \text{ et } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Soit  $(\mathcal{C}_f)$  la courbe représentative de la fonction dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(unité de 1 cm).

1.

- a- Calculer  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  puis interpréter géométriquement les résultats.
- b- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1)$  puis interpréter géométriquement les résultats.
- c- Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- d- Montrer que  $(\mathcal{C}_f)$  admet au voisinage de  $-\infty$  une asymptote oblique au voisinage de  $-\infty$  dont on déterminera l'équation.
- e- Étudier la position relative de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  et la droite  $(D)$  d'équation  $y = x - 1$  sur  $D_f$ .

2.

a- Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  puis interpréter géométriquement le résultat.

b- Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $] -\infty, -1[ \cup ] -1, 0[ \cup ] 0, +\infty[$ , puis vérifier que  $f'(x) = \frac{x^5(x+2)}{(x^3+x^2)^2}$ .

c- Étudier le signe de  $f'(x)$  sur  $] -\infty, -1[ \cup ] -1, 0[ \cup ] 0, +\infty[$ .

d- Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $D_f$ .

e- Écrire l'équation réduite de la tangente à  $(\mathcal{C}_f)$  au point  $x_0 = 0$ .

3. Construire dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la droite  $(D)$  et la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  (unité de 1 cm).

On considère  $g$  la restriction de la fonction  $f$  sur  $I = ] -1, 0]$ .

4) a- Montrer que la fonction  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur l'intervalle  $J$  qu'on déterminera.

4) b- Calculer  $g\left(\frac{1}{2}\right)$  puis montrer que la fonction réciproque  $g^{-1}$  est dérivable en  $\frac{1}{6}$ .

4) c- Calculer  $(g^{-1})'\left(\frac{1}{6}\right)$ .

## 6-5/ Exercice 5

Soit la fonction :  $f(x) = \frac{x(x^2+1)}{x^2-1}$

Soit  $(\mathcal{C}_f)$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Déterminer  $D_f$ , puis étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur  $D_f$ . Justifier les réponses.
- Étudier la parité de  $f$  et en déduire un élément de symétrie de  $(\mathcal{C}_f)$ .
- Étudier les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ , et en déduire les asymptotes éventuelles à  $(\mathcal{C}_f)$ .
- Étudier les variations de  $f$  et dresser son tableau de variations.
- Étudier la concavité de  $(\mathcal{C}_f)$  et résumer cette étude dans un tableau.
- Déterminer une équation cartésienne de la tangente  $(T)$  à  $(\mathcal{C}_f)$  au point d'abscisse 0.
- Étudier la position de  $(\mathcal{C}_f)$  par rapport à  $(T)$ .
- Tracer  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(T)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

## 6-5/ Exercice 6

### Partie 1

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ .

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ . et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
2. Vérifier que :  $g'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ .
3. En déduire que :  $(\forall x \in \mathbb{R}); g(x) > 0$ .

### Partie 2

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + 1}$ .

1. Vérifier que pour tout réel  $x$  on a :  $f'(x) = g(x)$ .
2. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
3. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
4. Montrer que la droite  $(D) : y = 2x - 1$  est une asymptote oblique à  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $+\infty$ .
5. Tracer  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(D)$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .