Mathématiques : 2 Bac SPC-SVT-STE-STM

Séance 3 (Continuité – Partie 2)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

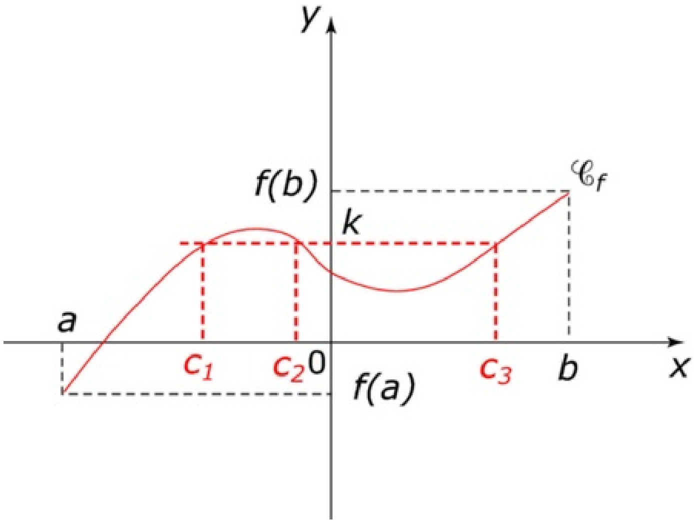
Sommaire

I- Théorème des valeurs intermédiaires

1-1/ Propriété (Théorème des valeurs intermédiaires)

f est une fonction continue sur $[a, b]$.

Pour tout nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un élément c de $[a, b]$ tel que $f(c) = k$



1-2/ Conséquences

Puisque la fonction f est continue on a $f([a, b]) = [m, M]$ (l'image d'un segment est un segment).

Si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a)f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution c dans $]a, b[$.

Exemples

1-3/ Cas d'une fonction continue et monotone

f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$.

Pour tout nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un seul un élément c de $[a, b]$ tel que $f(c) = k$

II- Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

2-1/ Théorème

Toute fonction continue et strictement monotone sur I , admet une fonction réciproque définie sur $f(I)$

$f : I \mapsto J$ est une fonction si tout $x \in I$ a une et seule image $y \in J$ et de même si tout $y \in J$ a un et seul antécédent $x \in I$

On définie une autre fonction notée f^{-1} et appelée fonction réciproque de f avec :

$$f : I \mapsto J = f(I)$$
$$x \mapsto f(x) = y \text{ et } \ f^{-1} : J = f(I) \mapsto I$$
$$y \mapsto f^{-1}(y) = x$$

2-2/ Relation entre f et sa réciproque f^{-1}

$$\begin{cases} f(x) = y \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in J \end{cases}$$

et

$$\forall x \in I \ : \ f^{-1} o f(x) = x$$

et

$$\begin{cases} \forall y \in J \ : \ f o f^{-1}(y) = y \\ \forall x \in I \ : \ f^{-1} o f(x) = x \end{cases}$$

2-3/ Propriétés de la fonction réciproque f^{-1}

La fonction réciproque f^{-1} est continue sur $J = f(I)$

La fonction réciproque f^{-1} et f varient dans le même sens.

(C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la 1er bissectrice $((D) : y = x)$

III- La fonction racine d'ordre n (ou racine $n^{ième}$)

3-1/ Définition et théorème

La fonction $f(x) = x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$

Sa fonction réciproque f^{-1} sera notée $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ et appelée La fonction racine d'ordre n (ou la fonction racine $n^{ième}$)

On l'appelle $\sqrt[n]{x}$ la racine d'ordre n du réel positif x

3-2/ Cas particuliers

Cas $n = 1$ on a $f^{-1}(x) = \sqrt[1]{x} = x$ (pas d'importance). Donc on prend $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$

Cas $n = 2$ on a $f^{-1}(x) = \sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ (racine carrée)

Cas $n = 3$ on a $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ (racine cubique ou racine d'ordre 3)

3-3/ Propriétés

Soient a et b de $\mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$			
$\sqrt[n]{1} = 1$; $\sqrt[n]{0} = 0$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	$\sqrt[n]{a^n} = a$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$	$\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a \leq b$	$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$	$\sqrt[n \times m]{a^m} = \sqrt[n]{a}$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[a \times m]{a}$	$(b > 0)$; $\sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$	$(b > 0)$; $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	

3-4/ Limites de la fonction $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \ et \ l \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$$

Les deux propriétés restent vraies si on remplace $x \to x_0$ par $x \to {x_0}^-$ ou $x \to {x_0}^+$ ou $x \to x + \infty$

Exemples

VI- Puissance rationnelle d'un nombre réel positif

4-1/ Définition

$x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$

On pose $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

Le nombre $\sqrt[n]{x^m}$ son écriture sera de la façon suivante $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ ou encore par $\sqrt[n]{x^m} = x^r$

x^r est appelé puissance rationnelle du nombre réel positif x d'exposant r

$(0^r = 0\ ;\ r \neq 0)$

4-2/ Propriétés

$\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall b \in \mathbb{R}^{+*}$.			
$a^r \rangle 0$ avec $r, r' \in \mathbb{Q}$	$a^r = b^{r'} \Leftrightarrow r = r'$	$a^r \times a^{r'} = a^{r+r'}$	$a^r \times b^r = (a \times b)^r$
$\left(a^r\right)^{r'} = a^{r \times r'}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$	$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$	$\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^6 + 2x^4 - 1$.

1. Montrer que l'équation $x^6 + 2x^4 - 1 = 0$ admet au moins une solution sur $]0;1[$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

2. Dresser le tableau de variaton de g sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note cette solution par α.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[1;+\infty[$.

5-2/ Exercice 2

On considère la fonction f définie par: $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

1. Déterminer D_f, puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.
2. Montrer que: $(\forall x \in D_f)\ f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer $f(]-\infty;-2])$, $f([-2;-1[)$, $f(]-1;0])$ *et* $f([0;+\infty[)$.

Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty;-2]$.

5. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
6. Monter que : $(\forall x \in J)\ g^{-1}(x) = \frac{x-\sqrt{x^2+4x}}{2}$.

5-3/ Exercice 3

1. Calculer les limites suivantes :

1- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2-\sqrt[3]{x+7}}{x-1}$

2- $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x-2}{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{3x-5}}$

3- $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{5x^2+x+1}+2x$

4- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{8x^3+3x+1}-2x$

5- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^3-5x+2}{3x^2+\sqrt[3]{2x^2+1}-5}$

6- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2+x+1}{\sqrt[3]{8x^2+3}-\sqrt[3]{8x^2+1}}$

5-4/ Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $f\left(x\right)=x^2-2\sqrt{x^2-1}$

1. Montrer que: $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right)=+\infty$.
2. Montrer que f est continue sur l'intervalle $[1;+\infty[$.
3. Montrer que $\left(\forall x>1\right)\ f'\left(x\right)=\frac{2x\left(x^2-2\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2-1}+1\right)}$.
4. Déduire les variations de f sur $[1;+\infty[$.

Soit g la restriction de f sur $\left[\sqrt{2}\,;+\infty\right[$.

5. Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un interval J à déterminer.
6. Montrer que $\left(\forall x\in\left[\sqrt{2}\,;+\infty\right[\right)\ :\ g\left(x\right)=\left(\sqrt{x^2-1}-1\right)^2$.
7. Déduire $g^{-1}\left(x\right)$, $\forall x\in J$.

5-5/ Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f\left(x\right)=x^3-x^2+3x+1$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $f\left(x\right)=0$ admet une solution unique a dans $\left]-\frac{1}{2};0\right[$.
3. Calculer $f\left(\frac{-1}{4}\right)$, puis déduire un encadrement de a d'amplitude $0,25$.
4. Montrer que $\sqrt{a+1}=\frac{-2a}{a+1}$

5-6/ Exercice 6

On considère la fonction f définie par : $f\left(x\right)=\frac{1}{x}-2\sqrt{x+1}$.

1. Justifier que $D_f=\left[-1;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[$.
2. Calculer les limites de f aux ornes de D_f.
3. Montrer que f est continue et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\left]\frac{1}{4}; 1\right[$.

5. Vérifier que $4\alpha^3 + 4\alpha^2 - 1 = 0$.