Mathématiques : 2 Bac SPC-SVT-STE-STM

Séance 2 (Continuité – Partie 1)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Continuité et continuité à droite et à gauche d'une fonction en un point x_0

1-1/ Continuité d'une fonction en un point x_0

Définition

f est une fonction définie sur D_f et I_{x_0} est un intervalle ouvert et contient x_0 et inclus dans D_f

$$f \text{ est continue au point } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Exemple

1-2/ Continuité à droite et à gauche d'une fonction en un point x_0

Définition 1

f est une fonction définie sur D_f et $I_d = [x_0, x_0 + r[\ ;\ (r > 0)$ est un intervalle inclus dans D_f

$$f \text{ est continue à droite au point } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Définition 2

f est une fonction définie sur D_f et $I_g =]x_0 - r, x_0]\ ;\ (r > 0)$ est un intervalle inclus dans D_f

$$f \text{ est continue à gauche au point } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Propriété

f est continue au point x_0 si et seulement si f continue à droite et à gauche de x_0.

Ou encore :

$$f \text{ est continue au point } x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = f(x_0)$$

Exemples

II- Continuité sur un intervalle

2-1/ Définitions

f est continue sur un intervalle ouvert $I =]a, b[\Leftrightarrow$ pour tout x de I ; f est continue en x.

f est continue sur $[a, b[\Leftrightarrow f$ est continue sur $]a, b[$ et f est continue à droite de a.

f est continue sur $]a, b] \Leftrightarrow f$ est continue sur $]a, b[$ et f est continue à gauche de b.

f est continue sur $[a, b] \Leftrightarrow f$ est continue sur $]a, b[$ et f est continue à droite de a et à gauche de b.

III- Opérations sur les fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$

3-1/ Propriétés

f est continue sur I et g est continue sur I.

Les fonctions $f+g$ et $f\times g$ et αf $(\alpha\in\mathbb{R})$ sont continues sur I.

Les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I (pour $x\in I$ tel que $g(x)\neq 0$).

IV- Continuité des fonctions usuelles

4-1/ Propriétés

Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction rationnelle est continue sur toute intervalle inclu dans D_f.

Les fonctions $x\mapsto \sin(x)$ et $x\mapsto \cos(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

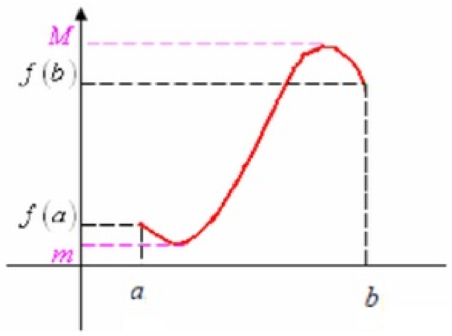
La fonction $x\mapsto \tan(x)$ est continue sur toute intervalle inclu dans $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\ \mathrm{k}\in\mathbb{Z}\right\}$.

La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

V- Image d'un intervalle par une fonction continue

5-1/ Propriétés

L'image du segment $[a,b]$ par une fonction continue est un segment $J=[m,M]$ (m est la plus petite image et M est la plus grande image par f des éléments de $[a,b]$) càd
$f([a,b])=[m,M]$



L'image d'un intervalle I par une fonction continue est un intervalle J. On note $J=f(I)$

VI- Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone

l'intervalle I	f est croissante sur I	f est décroissante sur I
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$[f(a);\lim_{x\to b^-}f(x)[$	$]\lim_{x\to b^-}f(x);f(a)]$
$]a;b]$	$]\lim_{x\to a^+}f(x);f(b)]$	$[f(b);\lim_{x\to a^+}f(x)[$
$]a;b[$	$]\lim_{x\to a^+}f(x);\lim_{x\to b^-}f(x)[$	$]\lim_{x\to b^-}f(x);\lim_{x\to a^+}f(x)[$
$[a;+\infty[$	$[f(a);\lim_{x\to+\infty}f(x)[$	$]\lim_{x\to+\infty}f(x);f(a)]$
$]-\infty;b]$	$]\lim_{x\to-\infty}f(x);f(b)]$	$[f(b);\lim_{x\to-\infty}f(x)[$

VII- Continuité de la composée de deux fonctions continues

1-1/ Théorème

f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors la fonction gof est continue en x_0

f est continue sur I et g est continue sur $f(I)$, alors la fonction gof est continue sur I

1-2/ Applications

$f(x) = \sin(ax+b)$ et $g(x) = \cos(ax+b)$ sont continues sur $\mathbb{R}$

$h(x) = \tan(ax+b)$ est continue pour tout x tel que $ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Si f est positive et continue sur I alors $g(x) = \sqrt{f(x)}$ est continue sur I.

IIX- Exercices

8-1/ Exercice 1

1. Étudier la continuité de f en x_0 dans les cas suivants :

a- $x_0 = 5$ *et* $\begin{cases} f\left(x\right) = \frac{x^2-2x-15}{x^2-25} ; x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-5;5\right\} \\ f(5) = 8 \end{cases}$

b- $x_0 = -1$ *et* $\begin{cases} f\left(x\right) = \frac{2}{x^3+1} ; x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1\right\} \\ f(-1) = 3 \end{cases}$

c- $x_0 = 3$ *et* $\begin{cases} f\left(x\right) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} ; x \in \left[0;+\infty\right[\setminus \left\{3\right\} \\ f\left(3\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{cases}$

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par :

$$\begin{cases} f\left(x\right) = \frac{1}{x+1} \ ; \ 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ f\left(x\right) = 2x + ax^2 \ ; \ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

2. Déterminer la valeur de a pour que f est continue en $x_0 = \frac{1}{2}$

3. Etudier la continuité de f en x_0 :

$$x_0 = 1 \ et \begin{cases} f\left(x\right) = \frac{x^2-3x+2}{x-1} \ ; \ x > 1 \\ f\left(x\right) = \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} \ ; \ x < 1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

8-2/ Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[2;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} \forall x \ > 2, \ f\left(x\right) = \frac{x^2-4}{x-2} \\ f(2) = 4 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f sur $[2;+\infty[$

8-3/ Exercice 3

1. Calculer l'image de l'intervalle I par f dans les cas suivantes:

a- $f\left(x\right) = x^2 - 2x + 3$; $I = \left[-2;3\right]$

b- $f\left(x\right) = \frac{x-1}{x+2}$; $I = \left]-2;+\infty\right[$

c- $f\left(x\right) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 1$; $I = \left]-\infty;1\right]$

8-4/ Exercice 4

1. Étudier la continuité de f sur I dans les cas suivants :

a- $f\left(x\right) = \sqrt{x^2 - 1}$; $I = \left[1; +\infty\right[$

b- $f\left(x\right) = \sqrt{-\sin^2(x) + \sin(x) + 2}$; $I = \left[0; \frac{\pi}{6}\right[$

8-5/ Exercice 5

On considéré la fonction f définie par $f(2) = 4$ et $f(x) = \frac{x^3-8}{x^2-x-2}$ si $x \neq 2$

1. Déterminer D_f.
2. Montrer que f est continue en $x_0 = 2$.
3. Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}),\ f(x) = \frac{x^2+2x+4}{x+1}$
4. Justifier que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$.

8-6/ Exercice 6

On considéré la fonction f définie par $f(1) = a$ et $f(x) = \frac{x^2\sqrt{x+3}-2}{1-x^2}$ si $x \neq 1$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer D_f, puis calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue en $x_0 = 1$?