Mathématiques : 2Bac SPC-SVT-Agro-STE-STM

Séance 1 (Limites et dérivation (Rappel))

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Limites des fonctions $\mathbf{x^n}$ $(\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*)$ et $\sqrt{\mathbf{x}}$ et leur inverses

$\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$	$\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Si n est un nombre paire :

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

Si n est un nombre impaire :

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$$

II- Limites des fonctions polynômes et rationnelles

2-1/ Limite d'une fonction polynôme

La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ et en $-\infty$ est celle de son terme de plus haut degré

Exemple

2-2/ Limite d'une fonction rationnelle

La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ et en $-\infty$ est celle du quotient des termes de plus haut degré

III- Limites des fonctions trigonométriques

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

IV- Limites des fonctions de type $\sqrt{u(x)}$

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = l \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \sqrt{u(x)} = \sqrt{l}$$
$$\lim_{x \to x_0} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \sqrt{u(x)} = +\infty$$

Ces résultats restent valable, à droite en x_0, à gauche en x_0, en $+\infty$ et en $-\infty$

V- Théorème de comparaison

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \leq v(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \ell \\ \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} |f(x) - \ell| \leq v(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \leq u(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \\ \lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Ces résultats restent valable, à droite en x_0, à gauche en x_0, en $+\infty$ et en $-\infty$

VI- Limites et opérations

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} [g(x) + f(x)]$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F I

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	ℓ	$\ell < 0$		$\ell > 0$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} [g(x) \times f(x)]$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F I

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell < 0$		$\ell > 0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F I	F I

Ces résultats restent valable, à droite en x_0, à gauche en x_0, en $+\infty$ et en $-\infty$

VII- La dérivabilité

7-1/ Fonction dérivable en un point

Définition

On dit qu'une fonction f est dérivable en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie.

Cette limite est appelée le nombre dérivé de f en x_0, on le note $f'(x_0)$.

Exemple

7-2/ Dérivée des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	
k	0	$(k \in \mathbb{R})$
x	1	
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	
x^r	rx^{r-1}	$(r \in \mathbb{Z}^* - \{1\})$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	

7-3/ Opérations sur les fonctions dérivées- dérivée d'une fonction composée

$$(u+v)' = u' + v'$$
$$(ku)' = k(u)' \ (k \in \mathbb{R})$$
$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$(u \circ v)' = [u' \circ v] \times v'$$
$$(u^n)' = nu'.u^{n-1}$$
$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

7-4/ Dérivée et sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I :

f est croissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I \ f'(x) \geq 0$

f est décroissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I \ f'(x) \leq 0$

f est constante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I \ f'(x) = 0$

IIX- Exercices

8-1/ Exercice 1

Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

1. Étudier la limite de f en $x_0 = -1$
2. Calculer les limites suiavantes :

$A = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - \sqrt{x}$	$F = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x + 5x^2 - 7x^4$

$B = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3+1}{(x-1)^2}$ $C = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3+1}{(x-1)^2}$ $D = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$ $E = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2}$	$G = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$ $H = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$ $I = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{3x^2-x}{2x^3+2x-4}$ $J = \lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$

8-2/ Exercice 2

1. Calculer les limites suivantes :

$$A = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2+x-1}{x^5-5}$$
$$B = \lim_{x \to -1} \frac{3x^2-x-4}{\sqrt{x+5}+2x}$$
$$C = \lim_{x \to 3} \frac{10-5x}{x^2-6x+9}$$
$$D = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{5x^3+x-1}}{2x-1}$$
$$E = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^4 - 2x^3 + 1} - x$$
$$F = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{2x^2 - x + 1} + 3x$$

8-3/ Exercice 3

1. Calculer les limites suivantes :

$$A = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 + 2} - 2x$$
$$B = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 5x}{x \sin 3x}$$
$$C = \lim_{x \to 2} \frac{\tan(x-2)}{x^2-4}$$
$$D = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{5x-4}}{\sqrt{x+5}-3}$$

8-4/ Exercice 4

1. Déterminer la fonction dérivée de f et étudier sa monotonie :

$$1 \;\; f(x) = x^2 + 3x + 1$$
$$2 \;\; f(x) = \sqrt{x} + x^3$$
$$3 \;\; f\left(x\right) = \frac{4x-3}{2x-1}$$
$$4 \;\; f\left(x\right) = \sqrt{x^2 - 4}$$