Mathématiques : 3ème Année Collège

Séance 3 (Racines carrées)

Professeur : Mr BENGHANI Youssef

Sommaire

I- La racine carrée d'un nombre réel positif

1-1/ Définition

Soit a un nombre réel positif ou nul (c'est-a-dire $a \geq 0$).

La racine carrée de a est le nombre réel positif dont le carré est égale à a, elle est notée $\sqrt{a}$.

Le symbole $\sqrt{}$ s'appelle : symbole radical.

1-2/ Propriété (Le carré d'une racine carrée)

Soit a un nombre réel tel que a> 0.

$$\sqrt{a^2} = \left(\sqrt{a}\right)^2 = a \ \ et \ \ \sqrt{(-a)^2} = a$$

Exemple

1-3/ Remarques importantes

La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas ($\sqrt{-9}$ n'existe pas) .

La racine carrée d'un nombre n'est jamais égale à un nombre négatif $\left(\sqrt{25} \neq -5\right)$.

L'opposé de $\sqrt{a}$ (avec $a \geq 0$) est $-\sqrt{a}$. (L'opposé de $\sqrt{11}$ est $-\sqrt{11}$) .

$\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$

1-4/ Les racines carrées parfaites

$\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{36} = 6$; $\sqrt{49} = 7$

$\sqrt{64} = 8$; $\sqrt{81} = 9$; $\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{121} = 11$; $\sqrt{144} = 12$; $\sqrt{169} = 13$

$\sqrt{196} = 14$; $\sqrt{225} = 15$; $\sqrt{256} = 16$; $\sqrt{289} = 17$; $\sqrt{324} = 18$; $\sqrt{361} = 19$; $\sqrt{400} = 20$

II- Résolution de l'équation $x^2 = a$

2-1/ $a > 0$

L'équation $x^2 = a$ est respectivement équivalente à :

$$\begin{gathered}
\mathrm{x}^2 - \mathrm{a} = 0 \\
\Rightarrow \mathrm{x}^2 - \sqrt{\mathrm{a}}^2 = 0 \\
\Rightarrow \left(\mathrm{x} - \sqrt{\mathrm{a}}\right)\left(\mathrm{x} + \sqrt{\mathrm{a}}\right) = 0 \\
\Rightarrow \left(\mathrm{x} - \sqrt{\mathrm{a}}\right) = 0 \text{ ou } \left(\mathrm{x} + \sqrt{\mathrm{a}}\right) = 0 \\
\Rightarrow \mathrm{x} = \sqrt{\mathrm{a}} \text{ ou } \mathrm{x} = -\sqrt{\mathrm{a}}
\end{gathered}$$

Donc cette équation admet deux solutions: $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

2-2/ $a = 0$

L'équation $x^2 = a$ est respectivement équivalente à :$x^2 = 0$, ce qui signifie que $x = 0$.

Donc cette équation admet pour solution le nombre 0.

2-3/ $a < 0$

L'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.

III- Les opérations sur les racines carrées

3-1/ Produit de deux racines carrées

Propriété

Soient a et b deux nombres réels positifs.

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$$

Exemple

Extraire un carré parfait

Soient a et b deux nombres réels positifs non nuls.

$$\sqrt{a^2\times b}=a\sqrt{b}$$

Exemple

3-2/ Quotient de deux racines carrées

Propriété

Soient a et b deux nombres réels tels que $a\geq 0$ et $b>0$.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Exemple

3-3/ Rendre un dénominateur rationnel ou supprimer le radical au dénominateur

Propriété 1

Soient a et b et k deux nombres réels tels que b> 0.

$$\sqrt{\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}}{b}\ ;\ \frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}\ ;\ \frac{a}{k\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{kb}$$

Exemple

Propriété 2 (Expression du conjugué)

Pour supprimer le radical au dénominateur, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Le conjugué de a- b est a+b, et le conjugué de a+b est a- b.

Exemple

IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

Calculer:

$\sqrt{(-3)^2}=$ ______ $\left(-\sqrt{7}\right)^2=$ ______ $\left(2\sqrt{5}\right)^2=$ ______ $\left(\sqrt{19}\right)^2=$ ______	$\sqrt{81}=$ ______ $\sqrt{121}=$ ______ $\sqrt{0,49}=$ ______ $\sqrt{15^2-9^2}=$ ______	$\sqrt{2^2\times 5^4}=$ ______ $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2=$ ______ $\sqrt{\frac{49}{36}}=$ ______ $\left(\frac{-\sqrt{7}}{3}\right)^2=$ ______

$$\sqrt{\sqrt{169}-\sqrt{144}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{9+\sqrt{49}}}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

4-2/ Exercice 2

Simplifier sous la forme de $a\sqrt{b}$ tel que a et b sont des nombres réels et $b \geq 0$:

$$A = -3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-2\sqrt{2} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$B = -2\sqrt{3}+\sqrt{3}-5\sqrt{3}+4\sqrt{3} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$C = 2\sqrt{5}+3\sqrt{5}-9\sqrt{5}+\sqrt{5} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$D = \left(\sqrt{\sqrt{5}-2}\right) \times \left(\sqrt{\sqrt{5}+2}\right) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$E = \left(\sqrt{2\sqrt{7}-2\sqrt{3}}\right) \times \left(\sqrt{2\sqrt{7}+2\sqrt{3}}\right) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

4-3/ Exercice 3

1. Simplifier sous la forme de $a\sqrt{b}$ tel que a et b sont des nombres réels et $b \geq 0$:

$$A = \sqrt{80}+3\sqrt{125}-\sqrt{45} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$B = 2\sqrt{18}-5\sqrt{8}+\sqrt{200} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$C = \sqrt{99}-\sqrt{176}+2\sqrt{44} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$D = -\sqrt{27}+\sqrt{75}-4\sqrt{48} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

2. Calculer :

$$E = \sqrt{150} \times \sqrt{\frac{3}{162}} =$$
$$F = \sqrt{\frac{3}{10}} \times \sqrt{\frac{270}{8}} =$$
$$G = \sqrt{\frac{8}{27}} \times \sqrt{\frac{3}{50}} =$$

4-4/ Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

$$x^2 = 16$$
$$x^2 = -4$$
$$-5x^2 = -25$$
$$\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$$

$$\frac{2}{9}x^2 = 2$$
$$5 + 2x^2 = 3$$

4-5/ Exercice 5

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \left(\sqrt{75} - \sqrt{98}\right)\left(5\sqrt{3} + 7\sqrt{2}\right) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$B = \left(3 + \sqrt{11}\right)^2 - \left(3 - \sqrt{11}\right)^2 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$C = \left(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}\right) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$D = \frac{2\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + \sqrt{12}}{\sqrt{75} + \sqrt{48} - 7\sqrt{3}} =$$

2. Écrire les quotients suivants sans radical au dénominateur :

$$\frac{1}{\sqrt{7}} =$$
$$\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} =$$
$$\frac{-10}{3\sqrt{5}} =$$
$$\frac{-4}{1-\sqrt{5}} =$$
$$\frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}}{\sqrt{5} + 2\sqrt{3}} =$$

4-6/ Exercice 6

On pose :

$$A = 2 + 3\sqrt{5}$$
$$B = 49 + 12\sqrt{5}$$
$$C = 49 - 12\sqrt{5}$$

1. Montrer que $\sqrt{B} = A$
2. Déduire $\sqrt{C}$
3. Calculer $\sqrt{B} \times \sqrt{C}$
4. Calculer $\sqrt{B} + \sqrt{C}$
5. Calculer $\sqrt{B} - \sqrt{C}$