Mathématiques : 3ème Année Collège

Séance 2 (Puissances)

Professeur : Mr BENGHANI Youssef

Sommaire

I- Puissance d'un nombre réel

1-1/ Définition

Soient a un nombre réel et n un nombre entier naturel non nul :

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times \dots\dots\dots \times a}_{n\ fois}}$$

a^n se lit: a puissance n ou a exposant n

Remarques

$$a^0 = 1 \ (a \neq 0) \ ; \ a^1 = a \ ; \ 0^n = 0 \ (n \neq 0) \ ; \ 0^0 \text{ n'existe pas}$$

Exemples

1-2/ Puissances à exposant négatif

Soient a et b deux nombres réels non nuls et n un nombre entier naturel :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ et } \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

1-3/ Le signe d'une puissance

Soit a un nombre réel et n un nombre entier non nul.

Si n est paire, alors a^n est toujours positif quel que soit le signe de a.

Si n est impaire, alors :

- Si a est positif, alors a^n est positif.
- Si a est négatif, alors a^n est négatif.

Remarques importantes

Soient a un nombre réel non nul et n un entier naturel.

1/ Si n est paire, alors $-a^n \neq (-a)^n$ -- Exemple : $-5^2 = -25$ *et* $(-5)^2 = 25$

2/ Si n est impaire, alors $-a^n = (-a)^n$ -- Exemple : $-5^3 = -125$ *et* $(-5)^3 = -125$

II- Règles de calculs sur les puissances

2-1/ Propriétés

soient a et b deux nombres réels non nuls, n et m deux entiers naturels.

Produit de deux puissances de même base :

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

Produit de deux puissances de même exposant :

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

Quotient de deux puissances de même base :

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Quotient de deux puissances de même exposant :

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Puissance d'une puissance :

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

Exemples

III- Puissance de 10

3-1/ Propriétés

Soit n un nombre entier naturel.

- $10^n = 1\underbrace{00\ldots\ldots0}_{n \text{ zéros}}$
- $10^{-n} = \underbrace{0,00\ldots\ldots0}_{n \text{ zéros}}1$
- $10^0 = 1$; $10^1 = 10$; $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n}$

IV- Écriture scientifique

4-1/ Définition

Soit x un nombre décimal, n un nombre entier relatif.
L'écriture scientifique de x est :

$$\boxed{x = a \times 10^n \quad \text{ou} \quad x = -a \times 10^n} \qquad \text{Avec } 1 \leq a < 10.$$

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

- Calculer et simplifier les expressions suivantes :

$A = \frac{5^{-7} \times 2^{-7}}{10^4 \times (10^{-2})^3} =$ $B = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \times \left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2 =$ $C = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)^{-4} \times 2^4 =$	$D = \left[\left(3^{-1} + \frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^3 =$ $E = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^3\right]^2 =$ $F = \left(-\frac{4\sqrt{7}}{2\sqrt{0,5}}\right)^2 =$

5-2/ Exercice 2

a et b deux nombres réels non nuls tel que $a \neq 3$.

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \left[1 + \left(\frac{3-a}{1+a}\right)^{-1}\right]^{-1} =$$

$$B = \frac{2a^5}{3a^4} \times \frac{a^{11}}{2a^2} \times \frac{a^3}{7a^{-3}} =$$

$$C = \frac{a^{-5} \times b^{-3} \times a^{-2}}{a^{-3} \times (b^{-2})^3} =$$

$$D = \frac{(a^2)^{-2} \times (a^3)^{-3}}{(a^2)^{-3}} =$$

5-3/ Exercice 3

Trouver l'écriture scientifique des nombres suivants :

$$\mathrm{a} = 2517,301 \times 10^{51} =$$
$$\mathrm{b} = -0,000069 \times 10^{23} =$$
$$\mathrm{c} = 113 \times 10^{5} + 7,2 \times 10^{7} =$$
$$\mathrm{d} = \frac{0{,}5 \times \left(10^{-3}\right)^{-2} \times (100)^{-2} \times (0{,}002)^{2}}{4 \times 10^{-4} \times (0{,}001)^{-3}} =$$
$$\mathrm{e} = \frac{3{,}2 \times 10^{-1} \times 5 \times \left(10^{2}\right)^{3}}{4 \times 10^{-2}} =$$

5-4/ Exercice 4

1. Déterminer la valeur du nombre entier naturel n tel que :

$$\frac{9^{2n-1} \times 3^{n+1}}{27^{n+3}} = 81$$

2. Prouver que le nombre K est un entier naturel :

$$k = 12^{100} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{50} \times 6^{-149}$$

3. Montrer que :

$$333333^2 + 444444^2 = 555555^2$$

4. Calculer :

$$M = \frac{3^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \times 5}{\left(\frac{120}{700}\right)^{0} \times 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}}$$

5-5/ Exercice 5

1. Écrire les puissances suivantes sous forme de a^n $(n > 0)$:

$\boxed{1}\ a = 4^2 \times 4^5$ $\boxed{2}\ b = \frac{4^3}{8^5}$ $\boxed{3}\ c = \left(\left(\frac{4}{5}\right)^2\right)^5$	$\boxed{4}\ d = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(\frac{7}{3}\right)^3$ $\boxed{5}\ e = \frac{7^0 \times \left(7^3\right)^{-4} \times 7^{15}}{7 \times \left(7^{-2}\right)^{-3}}$

2. Simplifier les expressions suivantes tel que $t \neq 0$ et $b \neq 0$:

$$\boxed{1}\ A = \frac{t^2 \times \left(t^{-3}\right)^{-4} \times t^{-3}}{t^0 \times t^7}$$
$$\boxed{2}\ B = \frac{b^3 \times \left(b^7\right)^2 \times \left(b^2\right)^{-3} \times b^0}{b \times \left(b^2\right)^3 \times b^{-5}}$$

On considère l'expression suivante : $C = \frac{3^2 \times \left(10^2\right)^7 \times 20 \times 10000}{5 \times 0{,}001}$

3. a- Montrer que : $C = 36 \times 10^{21}$

3. b- Écrire C sous forme d'une écriture scientifique

5-6/ Exercice 6

1. Déterminer le nombre entier relatif x sachant que :

$$4\left(5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}\right) = 31 \times 20^x$$

2. Déterminer les nombres entier naturels a, b et c tels que :

$$2^a \times 3^b \times 5^c = 648000$$