التمرين الأول : (3,5 ن)

المستوى العقدي منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ و m عدد عقدي.

1) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E): z^2-(m-i\,\overline{m}+1-i)z-i|m-i|^2=0$

0,5 أ- تحقق أن مميز المعادلة هو : $\Delta=(m+i\,\overline{m}-1-i)^2$

0,5 ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

0,5 ج- بين أن m ليس حلا للمعادلة (E)

2) في كل مايلي نفترض أن $m\neq i$ ونضع: $z_1=m-i$ و $z_2=1-i\overline{m}$

نعتبر في المستوى العقدي النقطتين $A(z_1)$ و $B(z_2)$

0,5 أ- بين أن $A\neq O$ و $B\neq O$ وأن $OB=OA$

0,5 ب- حدد مجموعة النقط $M(m)$ بحيث يكون $(OA)\perp(OB)$

0,5 ج- حدد مجموعة النقط $M(m)$ تكون النقط O و A و B مستقيمية.

0,5 د- حدد القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ في الحالة $m=e^{i\frac{\pi}{3}}$

التمرين الثاني: (3,5 ن)

I- نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E_a): 2z^2+a(1-i)z+a^2(1-i)=0$ حيث a عدد عقدي غير منعدم.

0,5 1) أحسب $(a+3ia)^2$.

0,5 2) حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E_a).

0,5 3) حدد معيار و عمدة كل من z_1 و z_2 بدلالة معيار و عمدة a.

II- في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ،

نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقيهما على التوالي a و ia :

1) بين أن المثلث OAB قائم الزاوية و متساوي الساقين. 0,5

2) ليكن F التطبيق الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث: $z'=(1+i)z-ia$

أ- نفترض أن $M \neq A$. بين أن $AM'=\sqrt{2}AM$ وحدد قياسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}\right)$. 0,5

ب- لتكن (C) الدائرة التي مركزها A و شعاعها $\sqrt{2}$. 0,5

بين أن صورة (C) بالتطبيق F هي دائرة (C') محددا مركزها و شعاعها.

ج- نعتبر الدوران r الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{4}$ التطبيق $h=r\circ F$. 0,5

حدد الصيغة العقدية للتطبيق h و استنتج طبيعته عناصره المميزة.

التمرين الثالث :(3 ن)

1) بين أن 163 عدد أولي 0.25

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(E):\ 13x-162y=1$

أ- حدد حلا خاصا للمعادلة (E) 0,25

ب- حل المعادلة (E) 0,5

3) نعتبر في $\mathbb{Z}$ النظمة : $(S):\begin{cases} x\equiv a & [13] \\ x\equiv b & [162] \end{cases}$ حيث a و b عددان من $\mathbb{Z}$

أ- تحقق من أن العدد $x_0=325b-324a$ هو حل للنظمة (S) 0.25

ب- بين أن: $(S)\Longleftrightarrow x\equiv x_0\ [2106]$ 0.5

ج- حل في $\mathbb{Z}$ النظمة (S) في الحالة $a=2$ و $b=3$ 0.25

4) ليكن x عددا من $\mathbb{Z}$ بحيث : $x^{25}\equiv 3\ [163]$

أ- بين أن: $x\wedge 163=1$ ثم أن: $x\equiv 3^{13}\ [163]$ 0.5

ب- استنتج أن: $x^{25}\equiv 3\ [163] \Longleftrightarrow x\equiv 3^{13}\ [163]$ 0.5

مسألة : (10 ن)

ليكن n من $\mathbb{N}^*$

نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f_n(x)=x^2e^{\frac{-n^2}{x^2}} & ,\ x\neq 0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$

الجزء الأول : نضع: $f = f_1$ وليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم

1) تحقق من أن الدالة f زوجية	0.25
2) أ- احسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$	0.5
ب- حدد الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$	0.25
3) أ- بين أن f متصلة على اليمين في الصفر	0.25
ب- بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر وأول النتيجة هندسيا	0.5
4) اعط جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$	0.5
5) لكل n من $\mathbb{N}^*$ و لكل x من $\mathbb{R}$ نضع: $g_n(x) = x^2 - n^2$	
أ- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad e^x \geq x+1$	0.25
ب- استنتج أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\forall x\in\mathbb{R})\quad f_n(x)\geq g_n(x)$	0.5
ج- بين أن: $\lim_{x\to+\infty}(f_n(x)-g_n(x)) = 0$	0.5
6) ارسم في نفس المعلم منحنى الدالة g_1 و المنحنى (C)	1

الجزء الثاني:

1) أ- بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ يوجد عدد حقيقي وحيد u_n موجب قطعا بحيث: $f_n(u_n) = 1$	1
ب- تحقق من أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad u_n > 1$	0.25
ج- بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\})\quad u_n > \frac{n}{\sqrt{2\ln n}}$	0.5
د- استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$	0.25
2) أ- تحقق من أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad 2(u_n)^2\ln(u_n) = n^2$	0.25
ب- بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \ln 2 + 2\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = 2\ln n$	0.25
ج- استنتج أن: $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(u_n)}{\ln n} = 1$	0.5

الجزء الثالث :

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة العددية g بحيث : $g(x) = \int_0^{\sqrt{x}} f(t)dt$

1) بين أن الدالة g معرفة على $\mathbb{R}^+$	0.25
2) بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$ واحسب $g'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^{+*}$	0.5
3) أ- بين أن: $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad g(x)\geq\sqrt{x}\left(\frac{x}{3}-1\right)$	0.5
ب- استنتج النهايتين: $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$	0.5
4) أ- بين أن: $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})\quad 0\leq g(x)\leq\sqrt{x}f(\sqrt{x})$	0.5
ب- استنتج أن الدالة g قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر	0.25