التمريـــــن الأول 3 ن

لكل $n \in \mathbb{N}$ نضع $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\,dx$

1) أحسب I_0 .

2) a) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad I_n \geq 0$

b) بين أن المتتالية (I_n) تناقصية واستنتج أنها متقاربة .

3) a) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : \quad I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1}$

b) استنتج $\lim I_n$.

4) a) بين باستعمال مكاملة بالأجزاء أن $I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$

b) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leq \frac{1}{n+2}$

c) استنتج $\lim nI_n$

التمريـــــن الثانـــي 9 ن

لكل دالة متصلة على $]-1,+\infty[$ نعتبر الدالة $T(f)$ المعرفة على $]-1,+\infty[$ بما يلي

$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1+t}dt$$

الجـــــــزء الأول

1) حدد الدالة $T(f)$ إذا كانت f ثابتة يعني $(\forall t \in]-1,+\infty[) : f(t) = a$.

2) حدد الدالة $T(f)$ إذا كانت f معرفـة بـ : $(\forall t \in]-1,+\infty[) : f(t) = \frac{t(t+1)}{(t+2)^2}$.

الجـــــــزء الثـــــاني

نفترض في هذا الجزء أن الدالة f معرفة بما يلي: $(\forall t \in]-1,+\infty[) : f(t) = e^{-t}$

1) a) بين أن الدالة $T(f)$ قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$ واحسب $\left(T(f)\right)'(x)$

b) ضع جدول تغيرات الدالة $T(f)$ على $]-1,+\infty[$.

2) a) بين أن $(\forall x \geq 0) : T(f)(x) \leq 1 - e^{-x}$

b) استنتج أن الدالة $T(f)$ تقبل نهاية منتهية l في $+\infty$ وأن $l \leq 1$.

3) a) بين أن $(\forall\ -1 < x < 0) : T(f)(x) \leq \ln(1 + x)$.

b) استنتج $\lim_{x \to -1^+} T(f)(x)$ وأول هندسيا النتيجة المحصل عليها . .

4) أنشئ المنحنى $(C_{T(f)})$.

5) a) بين أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = 1$ وأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+\ln(x))}{\ln(x)} = 0$

b) بين أن $(\forall x \geq 1) : 0 \leq T(f)(x) \leq \int_0^{\ln(x)} \frac{1}{1+t} dt + \frac{1}{x}\int_{\ln(x)}^{x} \frac{1}{1+t} dt$

c) استنتج أن

$$(\forall x \geq 1) : 0 \leq T(f)(x) \leq \ln(1 + \ln(x)) + \frac{1}{x}[\ln(1 + x) - \ln(1 + \ln(x))]$$

d) استنتج $\lim_{x \to +\infty} \frac{T(f)(x)}{\ln(x)}$

الجـــــزء الثـــــالث

نعتبر في هذا الجزء الدالة f_n المعرفة بما يلي : $(\forall t \in]-1,+\infty[) : f_n(t) = t^n$ مع $n \in \mathbb{N}^*$

1) ليكن $x > -1$.

a) بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : T(f_n)(x) + T(f_{n+1})(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

b) أحسب $T(f_1)(x)$.

c) استنتج أن : $(\forall n \in IN^*) : T(f_n)(x) = (-1)^n \left[\ln(1+x) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k} \right]$

2) ليكن $x \in]-1,1]$.

a) بين أن $\lim_{n \to +\infty} T(f_n)(x) = 0$

b) استنتج أن $\ln(1+x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$

التمرين — 5 ن

المستوى $\mathscr{P}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O;\vec{I};\vec{J})$. A هي النقطة ذات اللحق 2 .ليكن التطبيق φ من $\mathscr{P}$ نحو $\mathscr{P}$ الذي يربط كل نقطة M ذات اللحق z بالنقطة M' ذات اللحق z' بحيث : $z'=\frac{3+\sqrt{3}i}{4}z+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

1- بين أن A هي النقطة الصامدة الوحيدة بالتطبيق φ .

2- لتكن M نقطة من $\mathscr{P}$ تخالف A و M' صورتها بالتطبيق φ .

أ) بين أن $z'-2=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(z-2)$.

ب) استنتج AM' بدلالة AM وحدد قياسا للزاوية $(\widehat{\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AM'}})$.

ج) بين أن المثلث AMM' قائم الزاوية في M' .

د) أنشئ M' في حالة $z=4+i$

3- أ) بين أن $\varphi=h\circ r$ حيث r هو الدوران ذو المركز A والزاوية $\frac{\pi}{6}$ و h هو التحاكي ذو المركز A والنسبة $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ب) حدد صورة الدائرة (C) ذات المركز O والشعاع 1 بالتطبيق φ .

4- ليكن n عددا من $\mathbb{N}^*$ ونعتبر التطبيقات φ_n من $\mathscr{P}$ نحو $\mathscr{P}$ المعرفة بما يلي : $\varphi_1=\varphi$ و $\varphi_{n+1}=\varphi\circ\varphi_n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

نضع $\varphi_n(O)=M_n$ وليكن z_n لحق النقطة M_n .

أ) احسب z_1 .

ب) تحقق أن $M_{n+1}=\varphi(M_n)$ واستنتج أن : $z_{n+1}-2=\frac{3+\sqrt{3}i}{4}(z_n-2)$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

ج) نضع $t_n=z_n-2$. بين بالترجع أن : $t_n=-2\left(\frac{3+\sqrt{3}i}{4}\right)^n$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ثم حدد z_n بدلالة n .

د) اكتب العدد $\left(\frac{3+\sqrt{3}i}{4}\right)^n$ على شكله الجبري ثم حدد قيم n التي من أجلها النقط M_n تنتمي إلى المحور $(O;\vec{I})$.

التمرين — 3 ن

a و b عددان صحيحان طبيعيان بحيث $a>b$. نعتبر العدد $N=ab(a^{30}-b^{30})$.

1- ليكن p عددا أوليا موجبا بحيث $p-1$ يقسم العدد 30 .

أ) بين أن العدد p يقسم N (يمكنك استعمال مبرهنة فيرما)

ب) حدد قيم p واستنتج أن N يقبل القسمة على 322 14 .

2- نفترض أن : $\begin{cases} a^9+b^9=1953637 \\ a^{13}-b^{13}=1220694933 \end{cases}$

أ) تحقق أن $b<a<10$

ب) بين أن : $x^{13}\equiv x[5]$ و $x^9\equiv x[5]$ $(\forall x\in\mathbb{N})$ $x^{13}\equiv x[5]$, $x^9\equiv x[5]$

ج) استنتج أن $\begin{cases} a+b\equiv 2[5] \\ a-b\equiv 3[5] \end{cases}$ وحدد قيمة كل من a و b ثم بين أن N يقبل القسمة على 610 71 .