

# الحساب التكاملي

## 1. تكامل دالة متصلة على مجال:

### 1. تعريف:

لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $[a, b]$  و  $F$  دالة أصلية لها على  $[a, b]$ .

تكامل  $f$  من  $a$  إلى  $b$  هو العدد الحقيقي:  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

### 2. ملاحظات:

- نكتب  $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$
- يمكن تغيير  $x$  بأي متغير آخر مثلا:  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots$
- الدالة  $F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  هي الدالة الأصلية للدالة  $f$  التي تنعدم في  $a$
- $\psi$  قابلة للاشتقاق على  $E$  بحيث  $v(E) \subset I$  و  $f$  متصلة على  $I$  فإن الدالة  $\psi: x \mapsto \int_a^{v(x)} f(t) dt$  قابلة للاشتقاق على  $E$  ولدينا:  $\psi'(x) = v'(x) \cdot f(v(x))$

### 3. خاصيات:

$$\begin{aligned} \int_a^a f(x) dx &= 0 \quad \spadesuit \\ \int_a^b f(x) dx &= -\int_b^a f(x) dx \quad \spadesuit \\ \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \spadesuit \end{aligned}$$

#### 4. خطانية التكامل :

##### خاصية :

لتكن  $f$  و  $g$  دالتان متصلتان على المجال  $[a, b]$ . لدينا :

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \color{blue}{\oplus}$$

$$(\alpha \in \mathbb{R}) \quad \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx \quad \color{blue}{\oplus}$$

#### II. التكامل و الترتيب :

##### 1. خاصية :

لتكن  $f$  و  $g$  دالتان متصلتان على المجال  $[a, b]$ . لدينا :

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \text{فإن } f \geq 0 \text{ على } [a, b] \quad \color{purple}{\diamond}$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq 0 \quad \text{فإن } f \leq 0 \text{ على } [a, b] \quad \color{purple}{\diamond}$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad \text{فإن } f \leq g \text{ على } [a, b] \quad \color{purple}{\diamond}$$

#### 2. القيمة المتوسطة :

##### تعريف و خاصية :

▪ لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $[a, b]$ . العدد  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  يسمى القيمة المتوسطة ل  $f$  على  $[a, b]$

▪ يوجد على الأقل عدد  $c$  من  $[a, b]$  بحيث :  $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

### III. تقنيات حساب التكامل :

أ. باستعمال دالة أصلية : سبق الحديث عنها في بداية الدرس

ب. باستعمال المكاملة بالأجزاء :

#### خاصية :

لتكن  $u$  و  $v$  دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال  $I$  حيث  $u'$  و  $v'$  متصلتان على  $I$  و  $a$  و  $b$  عنصرين من  $I$  لدينا :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

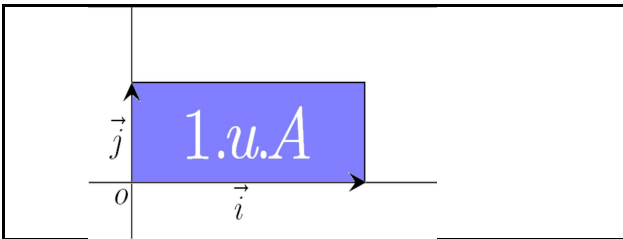
ج. باستعمال المكاملة بتغيير المتغير

#### خاصية و تعريف :

لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  و  $u$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $[\alpha, \beta]$  ( بحيث  $u([\alpha, \beta]) = I$  )

لدينا :  $\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(u(x))u'(x)dx$  ( و ذلك بوضع  $t = u(x)$  )

### IV. حساب المساحات :



ليكن المستوى منسوباً إلى معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

وحدة المساحة  $u.A$  هي مساحة المستطيل المحدد بالنقطة  $O$

و المتجهتين  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$

$$1u.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

#### خاصية 1:

لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $[a, b]$

مساحة الحيز المحصور بين  $(C_f)$  و محور الأفاصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = a$  و  $x = b$  هي :

$$\left( \int_a^b |f(x)| dx \right) u.A$$

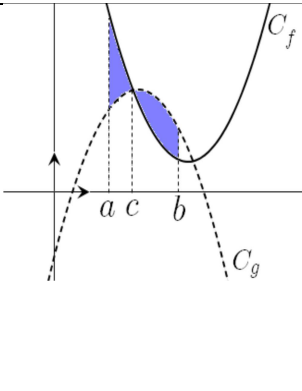
خاصية 2:

لتكن  $f$  و  $g$  دالتان متصلتان على المجال  $[a, b]$   
مساحة الحيز المحصور بين  $(C_f)$  و  $(C_g)$  و محور الأفصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = a$  و  $x = b$  هي :

$$\left( \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \right) u.A$$

حالات خاصة:

مساحة الحيز الملون في الرسم هي:	ملاحظات	رسم توضيحي
$\left( \int_a^b f(x) dx \right) u.A$	$f$ موجبة على المجال $[a, b]$	
$\left( \int_a^b -f(x) dx \right) u.A$	$f$ سالبة على المجال $[a, b]$	
$\left( \int_a^c f(x) dx + \int_c^b -f(x) dx \right) u.A$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f</math> موجبة على المجال <math>[a, c]</math></li> <li>و</li> <li>• <math>f</math> سالبة على المجال <math>[c, b]</math></li> </ul>	
$\left( \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right) u.A$	$(C_f)$ يوجد فوق $(C_g)$ على المجال $[a, b]$	

$\left( \int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx \right) u.A$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>(C_f)</math> يوجد فوق <math>(C_g)</math> على المجال <math>[a, c]</math></li> <li>و</li> <li>• <math>(C_f)</math> يوجد تحت <math>(C_g)</math> على المجال <math>[c, b]</math></li> </ul>	
--	---	---

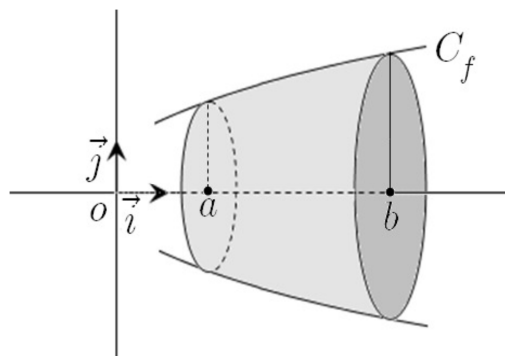
### .v. حساب الحجم :

#### خاصية 1:

ليكن  $(\Sigma)$  مجسما محصورا بين المستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$  اللذين معادلتاهما على التوالي:  $z = a$  و  $z = b$  ( $a < b$ )  
و لتكن  $S(t)$  مساحة تقاطع المجسم  $(\Sigma)$  مع المستوى الذي معادلته  $z = t$  حيث  $a \leq t \leq b$   
إذا كانت الدالة:  $t \mapsto S(t)$  متصلة على المجال  $[a, b]$  فإن  $V$  حجم المجسم  $(\Sigma)$  هو  $V = \int_a^b S(t) dt$  بوحدة قياس الحجم.

#### خاصية 2:

حجم المجسم المولد بدوران  $(C_f)$  حول محور الأفاصيل دورة كاملة في مجال  $[a, b]$  هو :  
حيث  $u.v$  : وحدة الحجم  $V = \left[ \int_a^b \pi (f(x))^2 dx \right] u.v$



**٧١. حساب بعض النهايات باستعمال التكامل :**

خاصية

لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $[a, b]$

$$\text{نضع } (n \in \mathbb{N}^*) \quad S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \quad \text{و} \quad s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

لدينا المتتاليتان  $(s_n)$  و  $(S_n)$  متقاربتان و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \int_a^b f(t) dt$