المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵎⵣⵡⴰⵔⵓ ⴷ ⵜⵏⵣⵓⵖⵉⵏ

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2022

– الموضوع –

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SS

NS 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	مسلك العلوم الرياضية – أ و ب	المعامل	9

تعليمات:

- مدة الاختبار هي أربع ساعات.
- يتضمن موضوع الاختبار أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن أن تنجز التمارين حسب الترتيب الذي يختاره المترشح.

- التمرين1 يتعلق بالتحليل..(10 نقط)
- التمرين2 يتعلق بالأعداد العقدية..................................(3.5 نقطة)
- التمرين3 يتعلق بالحسابيات...(3 نقط)
- التمرين4 يتعلق بالبنيات الجبرية..................................(3.5 نقطة)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر

التمرين 1: (10 نقط)

A. 1- تحقق أن: $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ ;\quad 0\le 1-x+x^2-\frac{1}{x+1}\le x^3$ — 0.25

2- استنتج أن: $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ ;\quad 0\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-ln(1+x)\le\frac{x^4}{4}$ — 0.25

B. نعتبر الدالة f المعرفة على $I=[0,+\infty[$ بما يلي:

$$f(0)=\frac{1}{2}\ \text{ و لكل } x \text{ من }]0,+\infty[\ ؛\quad f(x)=\frac{x-ln(1+x)}{x^2}$$

و ليكن (C) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0 — 0.5

ب) بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 — 0.5

ج) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. — 0.5

2-أ) بين أن: $(\forall x\in]0,+\infty[)\ ;\quad f'(x)=-\frac{g(x)}{x^3}$

حيث: $g(x)=x+\frac{x}{x+1}-2ln(1+x)$ — 0.5

ب) بين أن: $(\forall x\in I)\ ;\quad 0\le g'(x)\le x^2$ — 0.5

ج) استنتج أن: $(\forall x\in I)\ ;\quad 0\le g(x)\le\frac{x^3}{3}$ — 0.25

د) حدد منحى تغيرات الدالة f على I — 0.25

3-أ) اعط جدول تغيرات الدالة f — 0.25

ب) مثل مبيانيا المنحنى (C) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

(نأخذ $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=2cm$) — 0.5

C. 1- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0;1[$ بحيث $f(\alpha)=\alpha$ — 0.5

2- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي:

$$u_0=\frac{1}{3}\ \text{ و }\ (\forall n\in\mathbb{N})\ ;\quad u_{n+1}=f(u_n)$$

أ) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\quad u_n\in[0;1]$ — 0.5

ب) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\quad |u_{n+1}-\alpha|\le\left(\frac{1}{3}\right)|u_n-\alpha|$ — 0.5

ج) بين بالترجع أن: $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ — 0.5

د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تؤول إلى α — 0.25

D. لكل x من I، نضع: $F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$

1- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على I و احسب $F'(x)$ لكل x من I — 0.5

2- أ) باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء، بين أن:

$$F(x) = 2ln2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)ln(1+x) \quad ; \quad (\forall x \in]0,+\infty[)$$ — 0.5

ب) احسب $\lim_{x\to 0^+} F(x)$، ثم استنتج أن: $\int_0^1 f(t)\,dt = 2ln(2) - 1$ — 0.5

ج) احسب ، بالسنتمتر مربع (cm^2)، مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) و محور الأفاصيل و محور الأراتيب و المستقيم ذي المعادلة $x = 1$. — 0.5

E. نضع: لكل k من $\mathbb{N}$ ، $\Delta_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\,dt$

و لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، $S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \Delta_k$

1-أ) تحقق أن: $0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1) \quad ; \quad (\forall k \in \mathbb{N})$ — 0.25

ب) استنتج أن: $0 \leq S_n \leq \frac{1}{2} \quad ; \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$ — 0.5

2 -أ) بين أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ رتيبة. — 0.25

ب) استنتج أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة. — 0.25

ج) بين أن النهاية l للمتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تحقق: $\frac{3}{2} - 2ln2 \leq l \leq \frac{1}{2}$ — 0.25

<u>التمرين 2</u> : (3.5 نقط)

ليكن m **عددا عقديا معلوما وغير منعدم** و $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

I. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z

$$(E_m) \; : \quad z^2 + mj^2 z + m^2 j = 0$$

1- تحقق أن: $j^3 = 1$ و $1 + j + j^2 = 0$ — 0.5

2-أ) بين أن مميز المعادلة (E_m) هو : $\Delta = [m(1-j)]^2$ — 0.25

ب) حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E_m) — 0.5

3- نفترض في هذا السؤال أن : $m = 1+i$ | 0.5

بين أن $(z_1 + z_2)^{2022}$ عدد تخيلي صرف.

II. المستوى العقدي منسوب لمعلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$

ليكن φ التحويل في المستوى العقدي الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث:

$$z' = (1+j)z$$

1- حدد طبيعة التطبيق φ وعناصره المميزة. | 0.25

2- نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي m و mj و mj^2

و لتكن $A'(a')$ و $B'(b')$ و $C'(c')$ صور النقط A و B و C على التوالي بالتطبيق φ ولتكن

$P(p)$ و $Q(q)$ و $R(r)$ منتصفات القطع $[BA']$ و $[CB']$ و $[AC']$ على التوالي.

أ) بين أن: $a' = -mj^2$ و $b' = -m$ و $c' = -mj$ | 0.75

ب) بين أن: $p + qj + rj^2 = 0$ | 0.25

ج) استنتج أن المثلث PQR متساوي الأضلاع. | 0.5

<u>التمرين3: (3 نقط)</u>

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعا من 1

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $\quad (x+1)^n - x^n = ny \quad : \quad (E_n)$

ليكن (x,y) حلا للمعادلة (E_n) في $\mathbb{Z}^2$ و ليكن p **أصغر قاسم أولي** للعدد n

1- أ) بين أن: $(x+1)^n \equiv x^n \ [p]$ | 0.25

ب) بين أن p أولي مع x و مع $(x+1)$ | 0.25

ج) استنتج أن $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1} \ [p]$ | 0.25

2- بين أنه إذا كان n عددا زوجيا فإن المعادلة (E_n) لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ | 0.5

3- نفترض أن n عدد فردي.

أ) بين أنه يوجد زوج (u,v) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث: $nu + (p-1)v = 1$ | 0.5

(نذكر أن p أصغر قاسم أولي للعدد n)

ب) ليكن q و r بالتوالي خارج و باقي القسمة الاقليدية للعدد u على العدد $(p-1)$. | 0.25

تحقق أن : $nr = 1 - (p-1)(v+nq)$

ج) نضع: $v' = -(v+nq)$. بين أن: $v' \geq 0$ | 0.5

د) بين أن المعادلة (E_n) لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$ | 0.5

التمرين4: (3.5 نقطة)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية غير تبادلية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{Z},+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية و كاملة.

ليكن: $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$

1- أ) بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$ — 0.25

ب) تحقق أن لكل a و b و c و d من $\mathbb{Z}$ ، لدينا: — 0.25

$$M(a,b)\times M(c,d)=M(ac+3bd,ad+bc)$$

ج) بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية و واحدية. — 0.5

2- ليكن φ التطبيق من E نحو $\mathbb{Z}$ المعرف بما يلي:

$$\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2\quad;\quad\varphi(M(a,b))=\left|a^2-3b^2\right|$$

بين أن φ تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{Z},\times)$ — 0.5

3- لتكن $M(a,b)$ من E

أ) بين أن: $M(a,b)\times M(a,-b)=(a^2-3b^2).I$ — 0.25

ب) بين أنه إذا كانت $M(a,b)$ تقبل مقلوبا في $(E,\times)$ فإن : $\varphi(M(a,b))=1$ — 0.5

ج) نفترض أن $\varphi(M(a,b))=1$.

بين أن $M(a,b)$ تقبل مقلوبا في $(E,\times)$ و حدد مقلوبها. — 0.5

4- أ) بين أن: $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2\quad;\quad\varphi(M(a,b))=0\iff a=b=0$ — 0.25

ب) استنتج أن الحلقة $(E,+,\times)$ كاملة. — 0.25

ج) هل $(E,+,\times)$ جسم ؟ (علل جوابك). — 0.25

انتهى