التمرين الأول : (3,0 ن)

■ ① أ

ليكن n عددا فرديا

إذن : $(\exists k\epsilon\mathbb{N})\ ;\ n = 2k+1$

$$\Leftrightarrow\ (\exists k\epsilon\mathbb{N})\ ;\ n^2 = (2k+1)^2$$

$$\Leftrightarrow\ (\exists k\epsilon\mathbb{N})\ ;\ n^2 = 4k^2+4k+1$$

$$\Leftrightarrow\ (\exists k\epsilon\mathbb{N})\ ;\ n^2 = 4k(k+1)+1$$

k و $(k+1)$ عددان صحيحان طبيعيان و متتابعان إذن أحدهما فردي و الآخر زوجي. و منه فإن الجداء $k(k+1)$ عدد زوجي دائما.

إذن : $(\exists m\epsilon\mathbb{N})\ ;\ k(k+1) = 2m$

و بالتالي : $n^2 = 4k(k+1)+1 = 8m+1$

$$\Leftrightarrow\ n^2 - 1 = 8m$$

$$\Leftrightarrow\ n^2 \equiv 1[8]$$

■ ① ب

ليكن n عددا زوجيا .

هذا يعني أن : $(\exists k\epsilon\mathbb{N})\ ;\ n = 2k$

العدد الصحيح الطبيعي k يمكن أن يكون فرديا أو زوجيا .

الحالة الأولى : k عدد زوجي

إذن : $(\exists p\epsilon\mathbb{N})\ ;\ k = 2p$

و منه : $n = 4p$ يعني : $n^2 = 16p^2 = 8(2p^2)$

إذن : $8\ /\ n^2$ و منه : $n^2 \equiv 0[8]$

الحالة الثانية : k عدد فردي

إذن : $(\exists q\epsilon\mathbb{N})\ ;\ k = 2q+1$

و منه : $n = 4q+2$ يعني : $n^2 - 4 = 8(2q^2+2q)$

إذن : $8\ /\ (n^2-4)$ و منه : $n^2 \equiv 4[8]$

الخلاصة :

إذا كان n عددا زوجيا فإن : $n^2 \equiv 0[8]$ أو $n^2 \equiv 4[8]$

■ ② أ

نُذَكِّرُ في البداية أن مجموع ثلاثة أعداد فردية هو عدد فردي و أن مربع أي عدد فردي يكون دائما عددا فرديا .

نفترض أن $(a^2+b^2+c^2)$ مربع كامل.

إذن : $\boxed{(\exists d\epsilon\mathbb{N})\ ;\ a^2+b^2+c^2 = d^2}\ (1)$

بما أن a و b و c أعداد فردية فإن $(a^2+b^2+c^2)$ عدد فردي كذلك .

و منه حسب نتيجة السؤال ① أ

$$\begin{cases} a^2 \equiv 1[8] \\ b^2 \equiv 1[8] \\ c^2 \equiv 1[8] \end{cases}$$

إذن : $\boxed{a^2+b^2+c^2 \equiv 3[8]}\ (2)$

لدينا d و d^2 عددان فرديان

إذن حسب نتيجة السؤال ① أ $\boxed{d^2 \equiv 1[8]}\ (3)$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $3 \equiv 1[8]$

يعني أن : $8\ /\ 2$ و هذا مستحيل حدوثه

و بالتالي $(a^2+b^2+c^2)$ ليس مربعا كاملا.

■ ② ب

لدينا a و b و c أعداد فردية.

إذن حسب نتيجة السؤال ① أ :
$$\begin{cases} a^2 \equiv 1[8] \\ b^2 \equiv 1[8] \\ c^2 \equiv 1[8] \end{cases}$$

و منه : $\boxed{a^2+b^2+c^2 \equiv 3[8]}\ (4)$

و بما أن a و b و c أعداد فردية فإن $(a+b+c)$ عدد فردي كذلك

و منه حسب نتيجة السؤال ① أ $\boxed{(a+b+c)^2 \equiv 1[8]}\ (5)$

من (4) و (5) نستنتج أن :

$$(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) \equiv 1-3[8]$$

يعني : $(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) \equiv -2[8]$

و نعلم أن : $-2 \equiv 6[8]$

إذن : $(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) \equiv 6[8]$

و منه : $\boxed{2(ab+ac+bc) \equiv 6[8]}\ (\star)$

لأن : $(a+b+c)^2 = (a^2+b^2+c^2) + 2(ab+ac+bc)$

■ ② ج

نفترض أن العدد $2(ab+ac+bc)$ مربع كامل.

إذن : $(\exists m\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 2(ab+ac+bc) = m^2$

و لدينا $2(ab+ac+bc)$ عدد زوجي

و منه : m و m^2 عددان زوجيان .

إذن حسب نتيجة السؤال ① ب :

$$m^2 \equiv 0[8] \quad \text{أو} \quad m^2 \equiv 4[8]$$

في الحالة الأولى : $m^2 \equiv 0[8]$

لدينا حسب نتيجة السؤال ② ب $m^2 \equiv 6[8]$

إذن : $6 \equiv 0[8]$ و هذا مستحيل. لأن 8 لا تقسم 6

في الحالة الثانية : $m^2 \equiv 4[8]$

لدينا حسب نتيجة السؤال ② ب $m^2 \equiv 6[8]$

إذن : $6 \equiv 4[8]$ و هذا مستحيل. لأن 8 لا تقسم 2

و بالتالي : $2(ab+bc+ac)$ ليس مربعا كاملا.

■ ② د

نفترض أن : $(ab+bc+ac)$ مربع كامل.

إذن : $(\exists m\epsilon\mathbb{N})\ ;\ (ab+bc+ac)=m^2$

لدينا : a و b و c أعداد فردية.

إذن : $(ab+bc+ac)$ عدد فردي كذلك.

و منه m^2 عدد فردي . إذن m عدد فردي

و منه حسب ① أ : $m^2\equiv 1[8]$

أي : $ab+bc+ac\equiv 1[8]$

و منه : $2(ab+bc+ac)\equiv 2[8]$

لكن لدينا $2(ab+bc+ac)\equiv 6[8]$ و ذلك حسب $(\star)$

إذن : $6\equiv 2[8]$

يعني : $4\ /\ 8$ و هذا بطبيعة الحال مستحيل.

و بالتالي : $(ab+bc+ac)$ ليس مربعا كاملا .

التمرين الثاني : (3,0 ن)

■ ① أ

ليكن M_a و M_b عنصرين من E

$$M_a\times M_b=\begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt3}\left(a-\frac1a\right)\\ 0 & \frac1a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt3}\left(b-\frac1b\right)\\ 0 & \frac1b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ab & \frac{a}{\sqrt3}\left(b-\frac1b\right)+\frac{1}{b\sqrt3}\left(a-\frac1a\right)\\ 0 & \frac{1}{ab}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ab & \frac{1}{\sqrt3}\left(ab-\frac{1}{ab}\right)\\ 0 & \frac{1}{ab}\end{pmatrix}=M_{ab}$$

بما أن : $M_a\epsilon E$ و $M_b\epsilon E$ فإن : $a\neq 0$ و $b\neq 0$ و منه : $\boxed{ab\neq 0}$

■ ① ب

ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{R}^*$

لدينا :
$$\varphi\ :\ (\mathbb{R}^*,\times)\to(E,\times)$$
$$a\to\varphi(a)=M_a$$

لدينا : $\varphi(a\times b)=M_{ab}=M_a\times M_b=\varphi(a)\times\varphi(b)$

إذن : φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

و لدينا : $(\forall y\epsilon E),(\exists!\ a\epsilon\mathbb{R}^*)\ ;\ y=\varphi(a)=M_a$

إذن φ تقابل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

و بالتالي : φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

■ ① ج

بما أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$ فإن φ يحافظ على بنية الزمرة.

بما أن : $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد 1 و كل عنصر a يقبل $\frac1a$ كمماثل.

فإن : $(E,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد $\varphi(1)$ و كل عنصر M_a يقبل $\varphi\left(\frac1a\right)$ كمماثل.

و لدينا : $\varphi(1)=M_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I$

و $\varphi\left(\frac1a\right)=M_{\frac1a}=\begin{pmatrix}\frac1a & \frac{1}{\sqrt3}\left(\frac1a-a\right)\\ 0 & a\end{pmatrix}$

■ ② أ

ليكن N_a و N_b عنصرين من F

$$N_a\times N_b=\begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt3}\left(a-\frac1a\right)\\ -a\sqrt3 & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt3}\left(b-\frac1b\right)\\ -b\sqrt3 & -b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ab-b\left(a-\frac1a\right) & \frac{a}{\sqrt3}\left(b-\frac1b\right)-\frac{b}{\sqrt3}\left(a-\frac1a\right)\\ -ab\sqrt3+ab\sqrt3 & -a\left(b-\frac1b\right)+ab\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac ba & \frac{1}{\sqrt3}\left(\frac ba-\frac{1}{\frac ba}\right)\\ 0 & \frac{1}{\frac ba}\end{pmatrix}=M_{\frac ba}$$

■ ② ب

نضع : $G=E\cup F$

في البداية يجب أن نبرهن على أن :

$\forall(a,b)\ \epsilon\ (\mathbb{R}^*)^2\ ;\ M_a\times N_b=N_{\frac ba}$ و

$\forall(a,b)\ \epsilon\ (\mathbb{R}^*)^2\ ;\ N_b\times M_a=N_{ab}$

لدينا :

$$M_a\times N_b=\begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt3}\left(a-\frac1a\right)\\ 0 & \frac1a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt3}\left(b-\frac1b\right)\\ -b\sqrt3 & -b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac ba & \frac{1}{\sqrt3}\left(\frac ba-\frac ab\right)\\ \frac{-b}{a}\sqrt3 & \frac{-b}{a}\end{pmatrix}=N_{\frac ba}$$

و لدينا كذلك :

$$N_b \times M_a = \begin{pmatrix} b & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(b-\frac{1}{b}\right) \\ -b\sqrt{3} & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ab & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(ab-\frac{1}{ab}\right) \\ -ab\sqrt{3} & -ab \end{pmatrix} = N_{ab}$$

نحن الآن مسلحون بأربع خاصيات مهمة و هي :

$$\boxed{\begin{cases} M_a \times M_b = M_{ab} & (1) \\ N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}} & (2) \\ M_a \times N_b = N_{\frac{b}{a}} & (3) \\ N_b \times M_a = N_{ab} & (4) \end{cases}}$$

لنبرهن على أن $\times$ قانون تركيب داخلي في G

ليكن X و Y عنصرين من G

إذن نفصل هنا بين أربع حالات :

<u>الحالة الأولى : $X \in E$ و $y \in E$</u>

إذن حسب الخاصية رقم (1) : $X \times Y \in E$ إذن : $X \times Y \in G$

<u>الحالة الثانية : $X \in F$ و $Y \in F$</u>

إذن حسب الخاصية رقم (2) : $X \times Y \in E$ إذن : $X \times Y \in G$

<u>الحالة الثالثة : $X \in E$ و $Y \in F$</u>

إذن حسب الخاصية رقم (3) : $X \times Y \in F$ إذن : $X \times Y \in G$

<u>الحالة الرابعة : $X \in F$ و $y \in E$</u>

إذن حسب الخاصية رقم (4) : $X \times Y \in F$ إذن : $X \times Y \in G$

نلاحظ أنه في جميع هذه الحالات الأربع لدينا :

$$\forall\ (X,Y) \in G^2\ ;\ X \times Y \in G$$

و بالتالي $\times$ قانون تركيب داخلي في G .

<u>البحث عن العنصر المحايد :</u>

نعلم أن M_1 هو العنصر المحايد للقانون $\times$ في E و ذلك حسب نتيجة السؤال 1 ج

و نعلم كذلك أن العنصر المحايد إن وجد يكون دائما وحيدا .

يكفي الآن أن نبرهن أن :

$$\forall\ A \in G\ ;\ A \times M_1 = M_1 \times A = A$$

لتكن A مصفوفة من G . نفصل بين حالتين :

<u>الحالة الأولى : A فرد من أفراد E .</u>

إذن : $(\exists!\ a \in \mathbb{R}^*)\ ;\ A = M_a$

و لدينا حسب الخاصية رقم (1) :

$$M_a \times M_1 = M_a \text{ و } M_1 \times M_a = M_a$$

إذن : $A \times M_1 = M_1 \times A = A$

<u>الحالة الثانية : A فرد من أفراد F .</u>

إذن : $(\exists!\ a \in \mathbb{R}^*)\ ;\ A = N_a$

و منه حسب الخاصية (4) : $N_a \times M_1 = N_{a\times 1} = N_a$

و كذلك حسب الخاصية (3) : $M_1 \times N_a = N_{\frac{a}{1}} = N_a$

نستنتج إذن أن : $A \times M_1 = M_1 \times A = A$

في كلتا الحالتين لدينا :

$$\boxed{\forall A \in G\ ;\ A \times M_1 = M_1 \times A = A}$$

إذن M_1 هو العنصر المحايد لضرب المصفوفات في G .

<u>التماثل :</u>

$(E,\times)$ زمرة تبادلية و مماثل كل عنصر M_a يمتلك مماثلا و هو : $M_{\frac{1}{a}}$

G مجموعة تتكون من اتحاد مجموعتين و هما E و F

لنبحث عن مماثلات عناصر F .

ليكن N_a عنصرا من F .

إذن حسب الخاصية (2) : $N_a \times N_a = M_{\frac{a}{a}} = M_1$

و منه كل عنصر N_a من F يتماثل مع نفسه

و بالتالي جميع عناصر G تمتلك مماثلات من E و F .

<u>خلاصة السؤال ب :</u> $(G,\times)$ زمرة لأن $\times$ قانون تركيب داخلي في G و يقبل عنصرا محايدا وحيدا M_1 و كل عنصر يمتلك مماثلا وحيدا من G .

■ 2 ب

ليكن M_a عنصرا من E و N_b عنصرا من F

لدينا حسب الخاصية (3) : $M_a \times N_b = N_{\frac{b}{a}}$

و لدينا حسب الخاصية (4) : $N_b \times M_a = N_{ab}$

إذن : $M_a \times N_b \neq N_b \times M_a$

و بالتالي : $\times$ ليس تبادليا في G

يعني : الزمرة $(G,\times)$ ليست تبادلية .

التمرين الثالث : (3,5 ن)

■ ①

لنحل المعادلة : $z^2+z+1=0$

نحسب Δ نجد أن : $\Delta=\left(i\sqrt{3}\right)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين مترافقين z_1 و z_2 :

$$z_1=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{-2\pi i}{3}}=\bar{j}$$

$$z_2=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{2\pi i}{3}}=j$$

■ ② أ

لدينا : $z=e^{i\theta}$ إذن : $|z|=1$ و منه : $z\bar{z}=1$

لدينا إذن : $z(1+z+\bar{z})=z+z^2+z\bar{z}=z+z^2+1$

■ ② ب

لدينا z' مُعَرَّف لأنه إذا كان $\theta\neq\pm\frac{2\pi}{3}$ فإن $z^2+z+1\neq 0$

و لدينا حسب السؤال أ) $1+z+z^2=z(1+z+\bar{z})$

إذن : $$z'=\frac{1}{1+z+z^2}=\frac{1}{z(1+z+\bar{z})}$$

و منه :

$$|z'|=\left|\frac{1}{z}\right|\cdot\left|\frac{1}{1+z+\bar{z}}\right|=1\cdot\frac{1}{1+2\cos\theta}=\left(\frac{1}{1+2\cos\theta}\right)$$

و لدينا كذلك : $$Arg(z')\equiv Arg\left(\frac{1}{z}\right)+Arg\left(\frac{1}{1+z+\bar{z}}\right)[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow\quad Arg(z')\equiv -Arg(z)+0[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow\quad Arg(z')\equiv -\theta[2\pi]$$

و بالتالي : $$\boxed{z'=\left(\frac{1}{1+2\cos\theta}\right)e^{-i\theta}}$$

■ ② ج

لدينا : $$z'=x+iy=\left(\frac{1}{1+2\cos\theta}\right)e^{-i\theta}$$

إذن : $$\begin{cases}x=\dfrac{cos(-\theta)}{1+2\cos(\theta)}\\ y=\dfrac{sin(-\theta)}{1+2cos(\theta)}\end{cases}$$

و من هذه النظمة نستنتج أن :

$$x^2+y^2=\frac{cos^2(-\theta)}{(1+2cos(\theta))^2}+\frac{sin^2(-\theta)}{(1+2cos(\theta))^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2+y^2=\frac{cos^2(-\theta)+sin^2(-\theta)}{(1+2cos(\theta))^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2+y^2=\left(\frac{1}{1+2cos(\theta)}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2+y^2=\left(\frac{1+2cos(\theta)-2cos(\theta)}{1+2\,cos(\theta)}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2+y^2=\left(1-2\left(\frac{cos(\theta)}{1+2\,cos(\theta)}\right)\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{x^2+y^2=(1-2x)^2}$$

■ ② ب

من آخر نتيجة نستخرج ما يلي : $x^2+y^2=1+4x^2-4x$

$$\Leftrightarrow\quad -3x^2+4x+y^2=1$$

$$\Leftrightarrow\quad x^2-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}y^2=\frac{-1}{3}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}y^2=\frac{-1}{3}+\frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=1}$$

و منه : $M(z')$ تنتمي إلى الهذلول الذي مركزه هو النقطة $C\left(\frac{2}{3},0\right)$

و رأساه هما $S_1(1,0)$ و $S_2\left(\frac{1}{3},0\right)$

و مقارباه هما المستقيمان (Δ) و (Δ') المعرفين بما يلي :

$$\begin{cases}(\Delta):y=\sqrt{3}x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\\ (\Delta'):y=-\sqrt{3}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

التمرين الرابع : (10 ن)

■ (I) ①

لدينا : $$\forall\, x\,\epsilon\,]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[\quad:\quad f(x)=\frac{e^{-x}}{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)=\lim_{\substack{u\to-\infty\\u=-x}}-\left(\frac{e^u}{u}\right)=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)=\lim_{\substack{u\to0^+\\u=-x}}-\left(\frac{e^u}{u}\right)=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)=\lim_{\substack{u\to0^-\\u=-x}}-\left(\frac{e^u}{u}\right)=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)=\lim_{\substack{u\to-\infty\\u=-x}}-\left(\frac{e^u}{u}\right)=\boxed{0}$$

■ (I) ②

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}^*$

لدينا : $$f'(x)=\frac{-xe^{-x}-e^{-x}}{x^2}=\frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$$

بما أن : $\frac{-e^{-x}}{x^2}<0$ فإن إشارة $f'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(x+1)$

نستنتج إذن الجدول التالي :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
f	$-\infty$ ↗		$-e$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

■ (I) ③ (أ)

الفروع اللانهائية :

لدينا : $\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

إذن محور الأراتيب مقارب عمودي لـ $(\mathscr{C})$

و لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

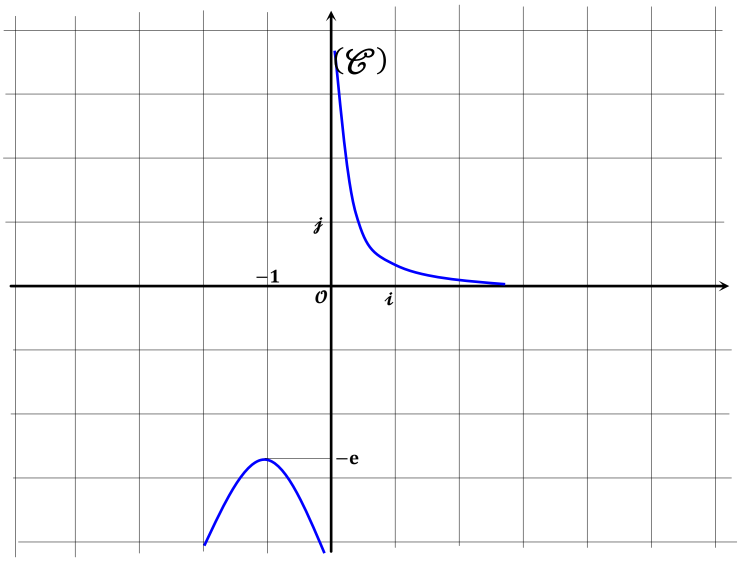
إذن محور الأفاصيل مقارب أفقي بجوار $+\infty$.

و لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

إذن $(\mathscr{C})$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب نحو الأسفل.

■ (I) ③ (ب)

تمثيل الدالة f . $(\mathscr{C})$



■ (II) ①

نعتبر الدالة : $\varphi(x)=e^x-x-1$

لدينا : $\varphi'(x)=e^x-1$

إذا كان $x=0$ فإن : $\varphi'(x)=0$

إذا كان $x>0$ فإن : $\varphi'(x)>0$

إذا كان $x<0$ فإن : $\varphi'(x)<0$

و لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

و لدينا : $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x}-1-\frac{1}{x}\right)=+\infty$$

نستنتج جدول التغيرات التالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

نلاحظ أن φ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ و قيمتها الدنوية هي 0

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ \varphi(x)\geq 0$

أي : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ e^x\geq(x+1)$

■ (II) ②

لدينا حسب السؤال ① : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^+)\ ;\ e^x\geq x+1$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{1}{e^x}\leq\frac{1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow\quad e^{-x}\leq\frac{1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow\quad(\forall x>0)\ ;\ xe^{-x}\leq\frac{x}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow\quad(\forall x>0)\ ;\ \frac{x^2}{x}e^{-x}\leq\frac{x}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow\quad(\forall x>0)\ ;\ x^2f(x)\leq\frac{x}{x+1}$$

■ (II) ③ (أ)

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=1$

يعني : $0<u_0\leq\frac{1}{0+1}$

إذن العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n=0$

نفترض أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\quad 0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

ننطلق من الطرف $u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$

$$\Leftrightarrow \quad (n+1)u_n \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad n\,u_n + u_n \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad n\,u_n + (2u_n - u_n) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad n\,u_n + 2u_n \leq 1 + u_n$$

$$\Leftrightarrow \quad (n+2)u_n \leq (1+u_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(n+2)u_n}{(1+u_n)} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{u_n}{1+u_n} \leq \frac{1}{n+2}} \ (\ast)$$

و لدينا $u_n \geq 0$ إذن حسب نتيجة السؤال 2 :

$$\boxed{(u_n)^2 f(u_n) \ \leq \frac{u_n}{1+u_n}} \ (\ast\ast)$$

من $(\ast)$ و $(\ast\ast)$ نستنتج أن : $(u_n)^2 f(u_n) \ \leq \dfrac{1}{n+2}$

$$\Leftrightarrow \ (\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 0 < (u_n)^2 f(u_n) \leq \frac{1}{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \ (\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)+1}$$

إذن العبارة صحيحة بالنسبة لـ $(n+1)$

و بالتالي : $\Leftrightarrow \boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}}$

■(II)(3)(ب)

بما أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \underbrace{0}_{\xrightarrow{n\infty} 0} < u_n \leq \underbrace{\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}_{\xrightarrow{n\infty} 0}$

فإن : $\lim\limits_{n\infty} u_n = 0$ و $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة

■(II)(4)(أ)

ليكن $k\in\mathbb{N}$. لدينا حسب تعريف المتتالية $(u_n)_n$:

$$(\forall k\in\mathbb{N})\ ;\ u_k = u_{k-1}e^{-u_{k-1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall k\in\mathbb{N})\ ;\ \frac{1}{u_k} = \frac{e^{u_{k-1}}}{u_{k-1}}$$

$$\Leftrightarrow \ (\forall k\in\mathbb{N})\ ;\ \ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = \ln\left(\frac{e^{u_{k-1}}}{u_{k-1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ (\forall k\in\mathbb{N})\ ;\ \ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = \ln(e^{u_{k-1}}) - \ln(u_{k-1})$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} u_{k-1} - \sum_{k=1}^{n}\ln(u_{k-1})$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k - \sum_{k=0}^{n-1}\ln(u_k)$$

$$\Rightarrow \ ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{1}{u_k}\right) = v_n - \sum_{k=1}^{n-1}\ln(u_k) - \underbrace{\ln(u_0)}_{0}$$

$$\Rightarrow \quad ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{1}{u_k}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\ln(u_k)\right) = v_n$$

$$\Rightarrow \quad ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\ln\left(\frac{1}{u_k}\right) + \ln(u_k)\right) = v_n$$

$$\Rightarrow \quad ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{u_k}{u_k}\right) = v_n$$

$$\Rightarrow \quad ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\ln(1) = v_n$$

$$\Rightarrow \quad ln\left(\frac{1}{u_n}\right) + 0 = v_n$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{ln\left(\frac{1}{u_n}\right) = v_n}$$

■(II)(4)(ب)

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

و لدينا : $ln\left(\dfrac{1}{u_n}\right) = v_n$

إذن : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{1}{u_n}\right) = +\infty$

■(III)①(أ)

ليكن : $x > 0$

$$\int_{x^2}^{4x^2} \frac{1}{t}\,dt = [\ln t]_{x^2}^{4x^2} = \ln(4x^2) - \ln(x^2) = \ln 4$$

■(III)①(ب)

لدينا حسب نتيجة السؤال (II) ① $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ e^x \geq x + 1$

من أجل العدد $-x$ نحصل على : $e^{-x} \geq -x + 1$

يعني : $e^{-x} - 1 \geq -x$

ليكن $x > 0$ إذن $-x < 0$

و منه : $e^{-x} < 1$ يعني : $\boxed{e^{-x} - 1 \leq 0}$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall x > 0)\ ;\ -x \leq e^{-x} - 1 \leq 0$

■(III)②(أ)

ليكن x عددا حقيقيا موجبا

لدينا : $-t < e^{-t} - 1 \leq 0$ و منه : $-1 < \frac{e^{-t}}{t} - \frac{1}{t} \leq 0$

$$\Leftrightarrow -\int_{x^2}^{4x^2} 1\,dt < \int_{x^2}^{4x^2} f(t)\,dt - \int_{x^2}^{4x^2} \left(\frac{1}{t}\right) dt \leq \int_{x^2}^{4x^2} 0\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad -3x^2 < F(x) - \ln 4 \leq 0$$

■(III)②(ب)

لدينا : $(\forall x > 0)\ ;\ -3x^2 \leq F(x) - \ln 4 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \quad -3x^2 < \frac{F(x) - 2\ln 2}{x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -3x^2 < \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \leq 0$$

و بما أن : $\lim_{x \to 0^+} -3x = \lim_{x \to 0^+} 0 = 0$

فإن : $\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 0$

و بالتالي F دالة قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر و نعلم أن الإشتقاق يستلزم الإتصال إذن F متصلة على اليمين في الصفر.

■(III)③(أ)

ليكن t عددا حقيقيا بحيث $t \geq 1$ إذن $\frac{1}{t} \leq 1$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الحقيقي الموجب قطعا e^{-t} نجد :

$$\frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{f(t) \leq e^{-t}}$$

■(III)③(ب)

لدينا حسب السؤال (أ) : $(\forall t \geq 1)\ ;\ f(t) \leq e^{-t}$

و لدينا كذلك حسب التمثيل المبياني للدالة f $(\forall t > 0)\ ;\ f(t) \geq 0$

$$\Rightarrow \quad (\forall t > 1)\ ;\ f(t) \geq 0$$

و منه : $(\forall t \geq 1)\ ;\ 0 < f(t) \leq e^{-t}$

$$\Rightarrow \quad 0 < \int_{x^2}^{4x^2} f(t)\,dt \leq \int_{x^2}^{4x^2} e^{-t}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad 0 < F(x) \leq e^{-x^2} - e^{-4x^2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < F(x) \leq e^{-x^2}\left(1 - e^{-3x^2}\right)$$

لدينا : $\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2}\left(1 - e^{-3x^2}\right) = 0(1 - 0) = 0$

و بالتالي : $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$

■(III)④(أ)

لدينا f دالة متصلة على $]0, +\infty[$

إذن فهي تقبل دالة أصلية نرمز لها بالرمز φ .

بحيث : $\varphi'(x) = f(x)$

لدينا : $F(x) = \int_{x^2}^{4x^2} f(t)\,dt \quad ; \quad x > 0$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) = \int_{x^2}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{4x^2} f(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) = \int_{0}^{4x^2} f(t)\,dt - \int_{0}^{x^2} f(t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad F(x) = \varphi(4x^2) - \varphi(x^2)$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = 8x\varphi'(4x^2) - 2x\varphi'(x^2)$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = 8xf(4x^2) - 2xf(x^2)$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = \frac{8xe^{-4x^2}}{4x^2} - \frac{2xe^{-x^2}}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad F'(x) = \frac{2e^{-4x^2}}{x} - \frac{2e^{-x^2}}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F'(x) = \frac{2e^{-x^2}\left(e^{-3x^2} - 1\right)}{x}}$$

■(III)(4)(ب)

لدينا : $x > 0$ إذن : $\dfrac{2e^{-x^2}}{x} > 0$

و منه فإن إشارة $F'(x)$ متعلقة بإشارة $e^{-3x^2} - 1$

و لدينا : $x > 0$ إذن : $-3x^2 < 0$ و منه : $e^{-3x^2} < 1$

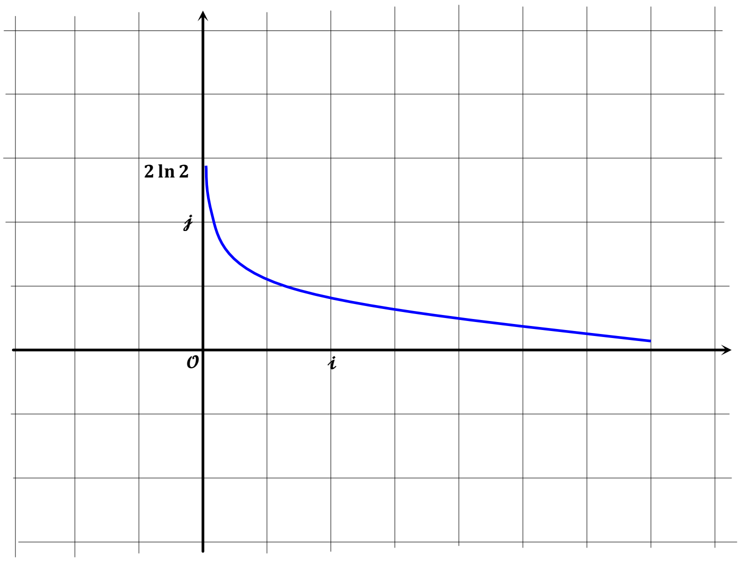
أي : $e^{-3x^2} - 1 < 0$.

و بالتالي : $F'(x) < 0$; $(\forall x > 0)$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة F كما يلي :

x	0	$+\infty$
$F'(x)$	$-$	
F	$2\ln 2$ ↘	0

■(III)(4)(ج)



■(III)(5)(أ)

ليكن $x > 0$.سوف نستعمل مكاملة بالأجزاء.

نضع : $u(t) = \ln t$ و منه : $u'(t) = \frac{1}{t}$

و نضع : $v'(t) = e^{-t}$ و منه : $v(t) = -e^{-t}$

لدينا : $G(x) = \displaystyle\int_x^{4x} e^{-t} \ln t \, dt = [uv] - \int vu'$

$$\Leftrightarrow \quad G(x) = [-\ln t \cdot e^{-t}]_x^{4x} - \int_x^{4x} \frac{-e^{-t}}{t} dt$$

$$\Leftrightarrow \quad G(x) = e^{-x}\ln(x) - e^{-4x}\ln(4x) + \int_{(\sqrt{x})^2}^{4(\sqrt{x})^2} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{G(x) = e^{-x}\ln(x) - e^{-4x}\ln(4x) + F(\sqrt{x})}$$

■(III)(5)(ب)

$$\lim_{x\to 0^+} (e^{-x} - e^{-4x})\ln x = \lim_{x\to 0^+} e^{-x}(1 - e^{-3x})\ln x$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \underbrace{(3xe^{-x})}_{\substack{x\to 0^+ \\ \to 0}} \underbrace{\left(\frac{e^{-3x} - e^{0}}{-3x - 0}\right)}_{\substack{x\to 0^+ \\ \to 1}} \underbrace{(x\ln x)}_{\substack{x\to 0^+ \\ \to 0}} = 0$$

■(III)(5)(ج)

لدينا : $G(x) = F(\sqrt{x}) - e^{-4x}(\ln 4 + \ln x) + e^{-x}\ln x$

$$\Leftrightarrow \quad G(x) = F(\sqrt{x}) + (e^{-x} - e^{-4x})\ln x - e^{-4x}\ln 4$$

$$\lim_{x\to 0^+} G(x) = \lim_{x\to 0^+} \Big(\underbrace{F(\sqrt{x})}_{\substack{x\to 0^+ \\ \to \ln 4}} + \underbrace{(e^{-x} - e^{-4x})\ln x}_{\substack{x\to 0^+ \\ \to 0}} - \underbrace{e^{-4x}\ln 4}_{\substack{x\to 0^+ \\ \to -\ln 4}}\Big)$$

و بالتالي : $\boxed{\lim_{x\to 0^+} G(x) = 0}$

■ و الحمد لله رب العالمين ■