

التمرين 1 :

I نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ للأعداد الصحيحة الموجبة قطعا

المعرفة لكل عدد صحيح طبيعي n بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

بين , باستعمال البرهان بالترجع , أنه لكل عدد صحيح طبيعي n :
(أ) $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq n$.

(ب) $\forall n \in \mathbb{N} : u_n u_{n+2} + (-1)^{n+1} = (u_{n+1})^2$.

II لتكن $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ و $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المتتاليتين العدديتين المعرفتين بما

يلي : $\forall n \in \mathbb{N} ; \alpha_n = \frac{u_{2n-1}}{u_{2n}} ; \beta_n = \frac{u_{2n}}{u_{2n+1}}$

(1) (أ) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \beta_n - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n} u_{2n+1}}$

(ب) استنتج أن : $\alpha_n < \beta_n$ و $0 < \beta_n - \alpha_n < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

(2) (أ) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1}{u_{2n} u_{2n+2}}$

(يمكن استعمال نتيجة السؤال I - ب)

(ب) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \alpha_n = \frac{1}{\beta_n} - 1$

(ج) استنتج تغيرات كل من المتتاليتين $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ و $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

(3) (أ) بين أن المتتاليتين $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ و $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متحاذيتان .

(ب) أحسب نهاية كل من المتتاليتين $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ و $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

التمرين 2 :

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث :

$$f(x) = 2 + \frac{1}{2} \sin(x)$$

(1) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0, \pi]$ بحيث :

$$f(\alpha) = \alpha$$

(2) لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

باستعمال مبرهنة التزايد المتناهية , بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

متقاربة وأن : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha$

التمرين 3 :

I لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x حيث :

$$g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}}$$

(1) (أ) أحسب نهايات g عند محداث مجموعة تعريفها .

(ب) بين أنه : $\forall x \in \mathbb{R} : g'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2(x^2+1)}^3}$

(ج) استنتج أن : $\forall x \in]0,1[: 0 < g'(x) < \frac{1}{\sqrt{2}}$

(د) أعط جدول تغيرات الدالة g .

(2) لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(أ) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n < 1$

(ب) أثبت أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < |u_{n+1} - 1| < \frac{1}{\sqrt{2}} |u_n - 1|$

(ج) استنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة وحدد نهايتها .

II نعتبر الدالة العددية f لمتغير حقيقي حيث :

$$f(x) = \text{Arc cos}(g(x))$$

(1) (أ) حدد D حيز تعريف الدالة f .

(ب) أحسب نهايات f عند محداث D .

(ج) بين أن : $\forall x \in]1, +\infty[; f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$

وأن : $\forall x \in]-\infty, 1[; f'(x) = -\frac{1}{x^2+1}$

(2) (أ) أثبت أن : $\forall x \in]1, +\infty[; f(x) = \text{Arc tan}(x) - \frac{\pi}{4}$

وأن : $\forall x \in]-\infty, 1[; f(x) = \frac{\pi}{4} - \text{Arc tan}(x)$

(ب) أدرس قابلية اشتقاق f في النقطة 1 .

(3) أعط جدول تغيرات الدالة f .

(4) (أ) بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف I .

(ب) أرسم (C_f) والمماس ل (C_f) في النقطة I .

التمرين 4 :

(1) برهن على أن : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : 2x - \frac{4}{3}x^3 \leq \sin(2x) \leq 2x$

(2) نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفتين بما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2} \quad \text{و} \quad u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{2n^2}\right)$$

(أ) أحسب v_n بدلالة n وحدد $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$

(ب) برهن على أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \leq n^4$

(ج) برهن على أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : v_n - \alpha \frac{1}{n^2} \leq u_n \leq v_n$

حيث α عدد حقيقي يتم تحديده . استنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة

وحدد نهايتها .

التمرين 5 :

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$$

(1) (أ) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على حيز تعريفها .

(ب) أعط جدول تغيرات الدالة f .

(ج) أنشئ (C_f) المنحى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى

معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(2) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $[0, 2]$ بما يلي :

$$g(x) = -1 - x + \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$$

(أ) أعط جدول تغيرات الدالة g .

(ب) استنتج أن: $0 \leq f(2) - f(x) \leq \frac{2}{3}(2-x)$ $\forall x \in [0, 2]$:

(3) لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كالآتي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

(أ) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 2$

(ب) أدرس رتبة المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(ج) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 2| < \left(\frac{2}{3}\right)^n$

(د) استنتج $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

التمرين 6 :

[A] لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي حيث :

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

(1) أعط جدول تغيرات الدالة f وتحقق أن: $f([1, 2]) \subset [1, 2]$.

(2) ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى

معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(أ) حدد أفاصيل نقط انعطاف المنحنى (C_f) .

(ب) أنشئ المنحنى (C_f) .

[B] لتكن g الدالة العددية لمتغير حقيقي حيث :

$$g(x) = \text{Arc sin}(f(x))$$

(1) حدد مجموعة تعريف الدالة g وأحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

(ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة g في النقطة 0 على اليسار.

(ج) أعط جدول تغيرات الدالة g .

(2) ليكن (C_g) المنحنى الممثل للدالة g في المستوى المنسوب إلى

معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(أ) أثبت أن: $\forall t \in [0, 1], \text{Arc sin}(t) \geq t$

(ب) استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $]-\infty, 0]$

(3) أنشئ ، بلون مغاير ، (C_g) .

(تحديد نقط الإنعطاف غير مطلوب)

[C] نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حيث :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

ونضع $\forall n \in \mathbb{N}: \boxed{v_n = u_{2n}} \quad \boxed{w_n = u_{2n+1}}$

(1) تحقق من أن: $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \in [1, 2]$

(2) بين أن: $\forall n \in \mathbb{N}: \boxed{w_n < v_n}$

(يمكن استعمال كون f of f تزايدية على المجال $[1, 2]$)

(3) بين أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية وأن $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية.

(4) (أ) بين أن: $\forall x \in [1, +\infty[; |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$

(ب) بتطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية على الدالة f of f , استنتج

أن: $\forall n \in \mathbb{N}^*; 0 < v_n - w_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 (v_{n-1} - w_{n-1})$

(ج) استنتج أن المتتاليتين $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متحاذيتان.

التمرين 7 :

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 1}$ بحيث :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \end{cases}; n \geq 2$$

(1) باستعمال مبرهنة التزايديات المنتهية للدالة $F: x \mapsto \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ على

المجالات $[k, k+1]$ حيث: $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, أثبت أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; u_n - \frac{1}{n} \leq \frac{2}{3} - \frac{2}{3n\sqrt{n}} \leq u_n - \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

(2) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ مقاربة وحدد نهايتها.

التمرين 8 :

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي حيث :

$$f(x) = \begin{cases} -x + \sqrt{x^2 + 1} & ; x \geq 0 \\ \frac{4}{\pi} \text{Arc tan}(-x + \sqrt{x^2 + 1}) & ; x < 0 \end{cases}$$

(1) أدرس اتصال f في النقطة 0.

(ب) أدرس قابلية اشتقاق f في النقطة 0.

(2) (أ) بين أن: $\forall x \in \mathbb{R}^*; f'(x) < 0$

(ب) أعط جدول تغيرات الدالة f محددًا نهايتها عند $+\infty$ و $-\infty$.

(3) أنشئ (C_f) , المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى

معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) . (وحدة القياس : 2 cm)

(4) نضع: $I = \left[\frac{1}{4}, 1\right]$. بين أن: $\boxed{f(I) \subset I}$.

(5) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حيث :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}; n \in \mathbb{N}$$

(أ) بين أن: $\forall x \in I; |f'(x)| < \frac{4}{5}$

(ب) باستعمال مبرهنة التزايديات المنتهية, بين أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \left|u_n - \frac{1}{\sqrt{3}}\right| < \frac{4}{5} \left|u_{n-1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right|$$

(ج) استنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ مقاربة وأحسب نهايتها.

(د) بين أن :

$$g(x) = \text{Arc sin} \left(\sqrt{\frac{1-x}{2}} \right)$$

(1) بين أن مجموعة تعريف الدالة g هي المجال $[-1,1]$.

(2) بين أن : $g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$: $\forall x \in]-1,1[$.

(3) نضع : $I = [-1,1]$ و $J = g(I)$ ؛ ولتكن h الدالة العددية

المعرفة من I نحو J بما يلي : $h(x) = g(x) : \forall x \in I$

بين أن h تقابلا محددًا J ؛ ثم أحسب $h^{-1}(x)$ لكل x من J .

(4) بين أن : $g(x) = \frac{1}{2} \text{Arc cos}(x) : \forall x \in [-1,1]$.

التمرين 12 :

لتكن f_α الدالة العددية لمتغير حقيقي حيث :

$$f_\alpha(x) = x + \text{Arc cos} \left(\frac{\alpha}{x} \right)$$

و α بارامتر حقيقي

و D_α حيز تعريف الدالة f_α

و (C_α) والمنحنى الممثل للدالة f_α في المستوى المنسوب إلى معلم

متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1) أ) تحقق من أن $D_0 = \mathbb{R}^*$ وأن (C_0) مستقيم محروم من نقطة A

ينبغي تحديدها .

ب) حدد D_α من أجل $\alpha \neq 0$.

ج) بين أن : $\text{Arc cos}(t) + \text{Arc cos}(-t) = \pi : \forall t \in [-1,1]$

وأثبت أن جميع المنحنيات (C_α) تقبل مركز تماثل مشترك

مطلوب تحديده .

د) أدرس إشارة $f_\alpha(x) - f_\beta(x)$ من أجل x في $D_\alpha \cap D_\beta$

و $\alpha < \beta$ ؛ وأول مبيانيا النتيجة .

(2) نفترض أن : $\alpha \neq 0$.

أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$ ؛ وبين أن المستقيم الذي معادلته

$y = x + \frac{\pi}{2}$ مقارب مشترك لجميع المنحنيات (C_α) .

ب) أحسب $\lim_{\substack{x \rightarrow |\alpha| \\ x > |\alpha|}} \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(|\alpha|)}{x - |\alpha|}$ ، (ناقش حسب الحالتين :

$\alpha > 0$ و $\alpha < 0$) . أول مبيانيا النتيجة .

(4) نفترض أن $\alpha > 0$.

أ) بين أن f_α تزايدية قطعًا على كل مجال من مجالات D_α .

ب) ضع جدول تغيرات الدالة f_α .

(4) أنشئ (C_0) و (C_1) في نفس المعلم .

(5) لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$0 < \alpha < a \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f_\alpha(u_n) \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$$

أ) مثل في المعلم السابق على محور الأفاصيل النقط التي أفصليها

u_0 و u_1 و u_2 و u_3 من أجل : $a=2$ و $\alpha=1$.

$$\forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[; f \left(\frac{1}{\tan(x)} \right) = \tan \left(\frac{x}{2} \right)$$

(هـ) نضع : $a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} ; \forall n \in \mathbb{N}$.

(i) تحقق أن : $a_0 = 1$ وأن : $a_{n+1} = 2^{n+1} - a_n : \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) بين أن : $u_n = \tan \left(\frac{\pi a_n}{2^{n+2}} \right) : \forall n \in \mathbb{N}$.

التمرين 9 :

ليكن α عددا حقيقيا أكبر قطعًا من $\frac{6}{5}$. $\left(\alpha > \frac{6}{5} \right)$

تعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفتين بما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \begin{cases} u_{n+1} = \frac{5u_n + v_n}{6} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + (\alpha - 1)v_n}{\alpha} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_1 = 1 \\ v_1 = 6 \end{cases}$$

(1) بين بالترجع أن : $0 < u_n < v_n : \forall n \in \mathbb{N}^*$.

(2) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ تزايدية وأن المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ تناقصية .

(3) بين أن : $v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{5}{6}(v_n - u_n) : \forall n \in \mathbb{N}^*$.

استنتج أن المتتاليتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متحاظتان .

(4) بين أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : 6\alpha u_{n+2} - (11\alpha - 6)u_{n+1} + (5\alpha - 6)u_n = 0$$

استنتج u_n بدلالة n و α ثم أحسب v_n بدلالة n و α .

التمرين 10 :

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي x المعرفة بما يلي :

$$f(x) = 2 + \frac{a}{x} \quad \text{حيث} \quad a \in]0, +\infty[$$

(1) أدرس تغيرات الدالة f .

ب) بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال

$]0, +\infty[$.

(2) تعتبر المتتاليات $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما

يلي : $1 < u_0 < \alpha$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ v_n = u_{2n} \\ w_n = u_{2n+1} \end{cases}$$

أ) بين أن : $0 < v_n < \alpha < w_n : \forall n \in \mathbb{N}$.

ب) بين أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية قطعًا وأن المتتالية $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$

تناقصية قطعًا ، واستنتج أن المتتاليتين $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$

مقاربتان .

ج) بين أن : $w_{n+1} - v_{n+1} < \frac{a}{2v_n + a}(w_n - v_n) : \forall n \in \mathbb{N}$.

د) بين أنه يوجد عدد حقيقي k غير مرتبط بالعدد n بحيث

$$\forall n \in \mathbb{N} : w_{n+1} - v_{n+1} < k(w_n - v_n) \quad \text{و} \quad 0 < k < 1$$

هـ) استنتج أن المتتاليتين $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متحاظتان يحددا

نهايتهما .

التمرين 11 :

لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x حيث :

(ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تزايدية قطعا .

(ج) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ غير مكبورة .

(د) بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

التمرين 13:

1. لكل n من \mathbb{N}^* نضع : $v_n = \sum_{k=1}^n k$. حدد v_n بدلالة n .

2. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n k^2 \leq n^3$

3. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي :

$$\forall x > 0 : f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

بين أن : $\forall x > 0 : x - \frac{x^2}{2} < f(x) < x$

4. لكل n من \mathbb{N}^* نضع : $S_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right)$. أحسب : $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

التمرين 14: نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n) & : n \in \mathbb{N} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} & : n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 & , v_0 = \sqrt{2} \end{cases}$$

1. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n < v_n$

2. أدرس رتبة كل من المتتاليتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

3. أ. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

ب. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : v_n - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$

ج. حدد : $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n)$

4. استنتج أن المتتاليتين $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متحاذيتين .

5. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{1}{2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}$

وأن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = v_n \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

6. حدد النهايتين التاليتين : $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

التمرين 15:

I- لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$f(x) = \text{Arc tan}(x) + 2x - 1$$

1. أثبت أن : $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) > 2$

2. بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} من \mathbb{R} نحو \mathbb{R}

3. بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل في \mathbb{R} حلا وحيدا α وأن

$$\alpha \in]0, 1[$$

4. بين أن : $\forall x > \alpha : f(x) > x$

II- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = b & , (b > \alpha) \\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) & , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > \alpha$

2. أدرس رتبة $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ واستنتج أنها مقاربة .

III-

1. باستعمال مبرهنة التزايديات المنتهية , بين أن :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - \alpha < \frac{1}{2}(u_n - \alpha)$$

2. استنتج : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

التمرين 16: نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x - \text{Arc tan } x}{|\text{Arc tan } x|} & , x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

وليكن (C) منحنى f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

I-

1. حدد D حيز تعريف الدالة f .

2. أدرس زوجية f واستنتج D_E مجموعة دراسة f .

3. أدرس اتصال f في النقطة 0 .

4. أ. بين أن : $\forall x > 0 : \text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

ب. حدد المستقيم (Δ) المقارب المائل ل (C) بجوار $+\infty$.

II-

1. أ. باستعمال مبرهنة التزايديات المنتهية بين أن :

$$\forall x > 0 : 0 < \frac{x - \text{Arc tan } x}{x} < \frac{x^2}{1+x^2}$$

ب. بين أن : $\forall x > 0 : \frac{x}{1+x^2} < \text{Arc tan } x$

2. أدرس اشتقاق الدالة f على يمين 0 وأعط تأويلا هندسيا لذلك .

3. أدرس تغيرات f على D_E وأعط جدول تغيراتها على \mathbb{R} .

4. أ. بين أن :

$$\forall x > 0 : f''(x) = \frac{2 \text{Arc tan } x (x - \text{Arc tan } x)}{\left((1+x^2) \text{Arc tan}^2 x\right)^2}$$

ب. استنتج تقعر (C) .

III- ليكن g قصور الدالة f على المجال $[0, +\infty[$.

1. بين أن g تقابل من $[0, +\infty[$ نحو $[0, +\infty[$.

2. أدرس اشتقاق g^{-1} على المجال $[0, +\infty[$.

3. أنشئ (C) و $(C_{g^{-1}})$ منحنى g^{-1} في نفس المعلم المتعامد

الممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

التمرين 17: ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. نعتبر f_n الدالة العددية المعرفة بما

$$f_n(x) = \text{Arc cos}\left(\frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}\right) \quad \text{يلي :}$$

I-1. أ. بين أن f_n معرفة على \mathbb{R} .

ب. أدرس زوجية f_n ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

2. أ. بين أن: $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f_n(x) = \pi - 2 \operatorname{Arc tan}(x^n)$

ب. بين أن الدالة f_n قابلة للإشتقاق على المجال $[0, +\infty[$ وأن:

$$\forall x \in]0, +\infty[: f_n'(x) = \frac{-2nx^{n-1}}{x^{2n} + 1}$$

ج. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في 0:

(ميز بين حالتين: $n=1$ و $n \neq 1$)

د. أعط جدول تغيرات f_n على \mathbb{R} في كلتا الحالتين: $n=1$ و $n \neq 1$

3. ليكن g_n قصور الدالة f_n على \mathbb{R}^+ . بين أن g_n تقابل من \mathbb{R}^+

نحو مجال I ينبغي تحديده؛ ثم حدد $g_n'(x)$ بدلالة $\cotan\left(\frac{x}{2}\right)$.

II- نأخذ في كل ما يلي $n=1$.

1. بين أن: $\exists! \alpha \in]1, 2[/ f_1(\alpha) = \alpha$

2. أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) منحنى f_1 على

\mathbb{R} ومنحنى g_1^{-1} .

التمرين 18: لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي:

$$f(x) = 2 \operatorname{Arc cos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \operatorname{Arc sin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) - \operatorname{Arc tan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

1. حدد D حيز تعريف الدالة f .

2. بسط كتابة $f(x)$ لكل x من D . (يمكن وضع $x = \tan(\theta)$)

3. حل المعادلة: $x \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{2\pi}{3}$

التمرين 19: لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي:

$$f(x) = \frac{\pi x}{2 \operatorname{Arc tan} x}, \quad x \neq 0$$

$$f(0) = \frac{\pi}{2}$$

1. أ. تحقق من أن f دالة زوجية.

ب. أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. بين أن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arc tan} x}{x} = 1$ ؛ ثم استنتج أن الدالة f متصلة في

$x_0 = 0$

3. أ. بين أن: $\forall x > 0, \forall c \in]0, x[: \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1$

ب. بتطبيق مبرهنة التزايد المتناهية على الدالة $t \mapsto \operatorname{Arc tan} t$

في مجال $[0, x]$ بحيث $x > 0$ ؛ أثبت أن:

$$\frac{1}{1+x^2} < \operatorname{Arc tan} x < x$$

ج. بين أن f قابلة للإشتقاق على اليمين في $x_0 = 0$ ؛ ثم أعط

التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها.

4. أ. أحسب $f'(x)$ لكل x من \mathbb{R}^* .

ب. أدرس إشارة $f'(x)$ على \mathbb{R}^{*+} (يمكن استعمال نتيجة 3- ب)

ج. أعط جدول تغيرات f على \mathbb{R} .

5. أ. بين أن: $\forall x > 0 : \operatorname{Arc tan} x + \operatorname{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

ب. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

6. أنشئ المنحنى (C) . الوحدة = 2cm.

التمرين 20:

I- لتكن g الدالة المعرفة على المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ بمايلي:

$$\begin{cases} g(x) = \frac{\tan x - x}{x}, & x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1. بين أن: $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: (1 + \tan^2 x)x - \tan x > 0$

2. أ. بين أن:

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: g'(x) = \frac{(1 + \tan^2 x)x - \tan x}{x^2}$$

ب. بين أن الدالة g متصلة على اليمين في 0 ثم أعط رتبة g على

المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

II- لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ بمايلي:

$$\begin{cases} f(x) = \operatorname{Arc tan}(g(x)), & x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ f(0) = 0, & f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1. أدرس اتصال f على اليمين في 0 وعلى اليسار في $\frac{\pi}{2}$.

2. أ. بتطبيق مبرهنة التزايد المتناهية على الدالة $t \mapsto \tan t - t$

على المجال $[0, x]$ بحيث $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ؛ أثبت أن:

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: 0 \leq \tan x - x \leq x \tan^2(x)$$

ب. أحسب: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2}$

ج. أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0؛ ثم أعط تأويلا هندسيا.

3. أ. بين أن: $\forall t > 0 : \operatorname{Arc tan}(t) + \operatorname{Arc tan}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$

ثم استنتج أن:

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: f(x) - \frac{\pi}{2} = -\operatorname{Arc tan}\left(\frac{x}{\tan x - x}\right)$$

ب. بين أن: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}}$

4. أدرس تغيرات g وأعط جدول تغيراتها.

5. أنشئ (C) . الوحدة = 2cm.

التمرين 21 : لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} & , x \geq 2 \\ f(x) = \frac{2}{\pi} \text{Arc tan} \left(\frac{1}{\sqrt{2-x}} \right) & , x < 2 \end{cases}$$

1. A. حدد D_f ؛ حيز تعريف الدالة f .
2. أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0 = 2$.
3. أحسب نهايات f عند محداث D_f ؛ ثم أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) .
4. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار في النقطة $x_0 = 2$.
5. أحسب $f'(x)$ لكل x من المجال $]-\infty, 2[$ ولكل x من المجال $]2, +\infty[$ ؛ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f .
6. أرسم (C_f) . (نعطي : $f(0) = 0,4$)
7. ليكن g قصور الدالة f على المجال $]-\infty, 2[$.

- بين أن g تقابل من المجال $]-\infty, 2[$ نحو مجال تحديده .
- حدد g^{-1} ثم مثل منحناها في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .
1. A. بين أنه يوجد عدد حقيقي k من المجال $]0, 1[$ بحيث :
 1. حدد D مجموعة تعريف الدالة f .
 2. حدد نهايات الدالة f عند محداث D .
 3. استنتج الفروع اللانهائية للمنحنى (C) .

2. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = g(u_n) & , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- أ. بين أن : $0 < u_n < 1$: $\forall n \in \mathbb{N}$.
- ب. بين أن : $|u_{n+1} - \alpha| < k |u_n - \alpha|$: $\forall n \in \mathbb{N}$.
- ج. استنتج أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة وأن نهايتها هي α .

التمرين 22 : نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة

$$\begin{cases} f(x) = 2 \left(x + \text{Arc sin} \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \right) & , x \leq -\frac{1}{2} \\ f(x) = \sqrt[3]{x^2(2x+1)} + \pi - 1 & , x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

- و (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) حيث :
$$\|\vec{i}\| = 2cm$$

1. أ. أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0 = -\frac{1}{2}$.
- ب. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقط : $x_0 = -\frac{1}{2}$ و $x_1 = 0$ و $x_2 = -1$. (يمكنك استعمال $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arc tan } X}{X} = 1$)

2. أ. أدرس تغيرات الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة

$$g(x) = x\sqrt{-2x-1} + 1$$

بمايلي : ثم استنتج إشارتها . (أحسب : $g(-1)$)

- ب. أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^* - \left\{ -1, -\frac{1}{2} \right\}$.

ج. أعط جدول تغيرات الدالة f .

3. أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) .

4. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α وأن $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$.

5. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = f(-n) - f(-n-1)$$

أ. بين أن لكل n من \mathbb{N}^* يوجد عدد حقيقي c_n من $]-n-1, -n[$

$$\text{بحيث : } u_n = f'(c_n)$$

ب. بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة وأحسب نهايتها .

التمرين 23 : نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة

$$f(x) = \text{Arc cos} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) - \text{Arc tan}(x)$$

بمايلي : ليكن (C) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. حدد D مجموعة تعريف الدالة f .
2. حدد نهايات الدالة f عند محداث D .
3. استنتج الفروع اللانهائية للمنحنى (C) .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\text{Arc cos} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)}{x} = 2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\text{Arc cos} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)}{x} = -2$$

- ب. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة 0 وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة .

ج. لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f . أحسب $f'(x)$ لكل x من

$$D - \{0\}$$

د. ضع جدول تغيرات الدالة f .

4. أنشئ المنحنى (C) .

5. لتكن g قصور الدالة f على المجال $[0, +\infty[$.

أ. أثبت أن g تقابل من $[0, +\infty[$ نحو مجال I يجب تحديده .

ب. بين أن :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : \text{Arc cos} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) = 2 \text{Arc tan } x$$

ج. لتكن g^{-1} الدالة العكسية للدالة g .

أحسب $g^{-1}(x)$ لكل x من I .

د. أنشئ في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) ؛ منحنى الدالة g^{-1} .

التمرين 24 : لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,8]$

$$f(x) = \sqrt{\left(4 - \sqrt[3]{x^2}\right)^3}$$

بما يلي :

1. أ. بين أن : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - 8}{x} = -\infty$

ب. بين أن الدالة f تناقصية قطعاً على المجال $[0,8]$.

ج. بين أن الدالة f تقابل من $[0,8]$ نحو مجال يتم تحديده.

2. ليكن (C) و (C') المنحنيين الممثلين للدالة f ولتقابلها العكسي

f^{-1} على التوالي في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

أ. بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ هو محور تماثل

المنحنى (C) .

ب. استنتج تعبير $f^{-1}(x)$ بدلالة x .

ج. أحسب النهاية $\lim_{\substack{x \rightarrow 8 \\ x < 8}} \frac{f(x)}{x-8}$

د. أرسم المنحنى (C) .

3. نعتبر النقطتين $A(8,0)$ و $B(0,8)$ والدالة g المعرفة على

$$g(x) = f(x) + x - 8 \quad [0,8]$$

بما يلي :

أ. بين أن : $\exists \alpha \in]0,8[\quad / \quad g'(\alpha) = 0$

ب. استنتج أن المنحنى (C) مماس مواز للمستقيم (AB) في نقطة

M_0 أفصولها α , ثم حدد α .

4. نعتبر المتتالية العددية $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} \alpha < x_0 < 8 \\ \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

أ. مثل في المعلم السابق على محور الأفاصيل النقط التي أفاصيلها

x_0 و x_1 و x_2 و x_3 .

ب. بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : \alpha < x_n < 8$

ج. بين أن المتتالية $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ رتيبة.

د. استنتج أن المتتالية $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة.

هـ. أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

التمرين 25 : نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \text{Arc sin}(x-1) - \sqrt{2x-x^2} + 2 - \frac{\pi}{2}; x \in [0,2] \\ f(x) = x - \sqrt{x^2-4}; x \in]2, +\infty[\end{cases}$$

(C) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب الى معلم

متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. أ. حدد D مجموعة تعريف الدالة f . هل الدالة f متصلة في

النقطة $x_0 = 2$ ؟

ب. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C) .

2. أحسب $f'(x)$ لكل $x \in]0,2[$ أحسب $f'(x)$ لكل $x \in]2, +\infty[$.

3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة $x_0 = 2$.

4. أ. بين أن : $\forall t \in]0,1[: \frac{t}{\sqrt{2t-t^2}} < \sqrt{t}$

ب. بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على المجال $[0, x]$ ؛

$$0 < \frac{f(x) - f(0)}{x} < \sqrt{x} \quad (0 < x < 1)$$

ثم استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر

محددا العدد المشتق للدالة f على اليمين في الصفر .

5. أ. بين أن : $\forall x \in]1,2[: \frac{f(x) - f(2)}{x-2} > \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

(استعمل مبرهنة التزايدات المنتهية على المجال $[x, 2]$)

ب. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في النقطة $x_0 = 2$.

6. أ. ضع جدول تغيرات الدالة f .

ب. بين أن : $\exists \alpha \in \left]1, \frac{3}{2}\right[\quad / \quad f(\alpha) = 0$

ج. أدرس تفرع المنحنى (C) .

د. أنشئ المنحنى (C) في المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

7. لتكن φ الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\forall x \in [1, +\infty[: \varphi(x) = f(x+2)$$

أ. بين أن : $\forall x \in [1, +\infty[: \frac{2}{x+2} < \varphi(x) < \frac{2}{x}$

ب. استنتج أن : $\forall x \in [1, +\infty[: \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} < \varphi(x) < \frac{2}{x}$

ج. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : u_n = \varphi\left(\frac{n^2}{1}\right) + \varphi\left(\frac{n^2}{2}\right) + \dots + \varphi\left(\frac{n^2}{n}\right)$$

باستعمال السؤال (7- ب) , بين أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{n+1}{n} - \frac{2(n+1)(2n+1)}{3n^3} < u_n < \frac{n+1}{n}$$

(تذكير : $\sum_{p=1}^n p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

ثم استنتج أن $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة محددا نهايتها .

التمرين 26 : ليكن a عددا حقيقيا حيث $|a| < 1$ ولتكن f_a الدالة

عددية لمتغير حقيقي x والمعرفة بما يلي :

$$f_a(x) = \text{Arc cos}\left(\frac{a + \cos(x)}{1 + a \cos(x)}\right)$$

1. أ. أثبت أنه : $\forall x \in \mathbb{R} : 1 + a \cos(x) > 0$

ب. أوجد D مجموعة تعريف الدالة f_a .

2. أ. أثبت أنه يمكن الاقتصار على المجال $[0, \pi]$ لدراسة الدالة f_a .

و $f^{(n)}$ متصلة على المجال $[a, b]$.

لتكن x_1 و x_2 و... و x_n أعداد حقيقية بحيث :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : f(x_i) = 0 \text{ و } a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$$

$$\forall x \in [a, b] , \exists c \in [a, b] / \quad : \text{بين أن 1.}$$

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

2. نضع : $M = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n)}(x)|$. بين أن :

$$\forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq \frac{M}{n!} \prod_{i=1}^n |x - x_i|$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : |f'(x_i)| \leq \frac{M}{n!} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |x_i - x_j| \quad : \text{بين أن 3.}$$

4. **تعميم :** بين أن :

$$\forall x \in [a, b] : |f'(x)| \leq \frac{M}{n!} \sum_{i=1}^n \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |x - x_j| \right)$$

ماذا يمكن أن تستنتج من أجل $n = 2$ و $x_1 = a$ و $x_2 = b$ ؟

التمرين 29 : Règle de L'Hospital

1. لتكن f و g دالتين عدديتين متصلتين على مجال $[a, b]$

وقابلتين للاشتقاق على المجال $]a, b[$. بين أن :

$$\exists c \in]a, b[: [f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c)$$

بإمكانك استعمال الدالة العددية :

$$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto [f(b) - f(a)] \times [g(x) - g(a)]$$

$$- [g(b) - g(a)] \times [f(x) - f(a)]$$

ملاحظة : إذا كان $g'(c) \neq 0$ و $g(a) \neq g(b)$, فإن :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

2. أ. بين أنه إذا كان $f(a) = g(a) = 0$ وأن $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ و $x \neq a$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l \quad : \text{فإن}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\text{Arc tan}(x) - \frac{\pi}{3}}{x - \sqrt{3}} \quad : \text{ب. أحسب}$$

ج. **انتبه :** الإستلزام المعاكس للإستلزام $(2 - أ)$ خاطئ .
أعط مثالا مضادا .

$$\forall x \in]0, \pi[: f'_a(x) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1+a \cos(x)}$$

ب. بين أنه :

$$\varphi_a(x) = \frac{1}{1+a \cos(x)} - \frac{1}{1+a} \quad : \text{بما يلي 3.}$$

أ. أدرس , حسب قيم الوسيط الحقيقي a , تغيرات الدالة φ_a .
ب. استنتج أنه :

$$\forall (c, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < c < x < \pi \Rightarrow |\varphi_a(c)| \leq |\varphi_a(x)|$$

ج. بتطبيق مبرهنة التزايد المتناهية على الدالة :

$$h : t \mapsto f_a(t) - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \cdot t \quad \text{حيث } [0, x]$$

$$|f_a(x) - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} x| \leq x \sqrt{1-a^2} |\varphi_a(x)| \quad : \text{أثبت أن } 0 < x < \pi$$

د. استنتج أن f_a قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة π .

5. أعط جدول تغيرات الدالة f_a على المجال $[0, \pi]$.

6. لتكن g_a الدالة المعرفة من المجال $[0, \pi]$ نحو المجال $[0, \pi]$

$$g_a(x) = f_a(x) \quad : \text{بما يلي}$$

أ. بين أن g_a تقابل .

$$. \text{ب. أثبت أن : } (g_a)^{-1} = g_{-a}$$

7. ليكن (C_a) المنحنى الممثل للدالة f_a على المجال $[-\pi, \pi]$ في

المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

$$\text{أرسم } \left(C_{\frac{1}{2}} \right) \text{ و } \left(C_{-\frac{1}{2}} \right) \text{ في المعلم } (O, \vec{i}, \vec{j}) .$$

التمرين 27 :

1. لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال $[a, b]$ بحيث :

$$. a < b \text{ و } f(a) = f(b)$$

بين أن : $\forall x \in]a, b[; \exists c \in]a, b[/$

$$f(x) = (x-a)(x-b) \frac{f''(c)}{2}$$

2. ماذا يمكن أن تستنتج بالنسبة لمنحنى الدالة f إذا كان لدينا :

$$\forall x \in [a, b] : f''(x) > 0$$

3. لتكن f دالة قابلة للاشتقاق ثلاث مرات على مجال $[a, b]$

حيث $a < b$ ؛ ولتكن x_1 و x_2 و x_3 ثلاثة أعداد حقيقية بحيث :

$$a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$$

$$\text{و } \forall i \in \{1, 2, 3\} : f(x_i) = 0$$

بين أن : $\forall x \in]a, b[; \exists c \in]a, b[/$

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \frac{f'''(c)}{3!}$$

التمرين 28 : ليكن a و b عددين حقيقيين حيث $a < b$ ولتكن

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة عددية قابلة للاشتقاق n مرة (حيث $n \geq 2$)