الحسابيات

تمرين 1

أ - بين أن : 13 تقسم $7\times 3^{3n+4}+5\equiv 0[13]$

ب - حدد k بحيث : 13 تقسم $5\times 3^{49}+k$

الحل

أ -

$$\begin{cases} 3^{3}\equiv 1[13] \\ 3^{4}\equiv 3[13] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{3n}\equiv 1[13] \\ 3^{4}\equiv 3[13] \end{cases} \Rightarrow 3^{3n+4}\equiv 3[13]$$

$$3^{3n+4}\equiv 3[13] \Rightarrow 7\times 3^{3n+4}\equiv 8[13] \Rightarrow 7\times 3^{3n+4}+5\equiv 0[13]$$

ب -

$$\begin{cases} 3^{45}\equiv 1[13] \\ 3^{4}\equiv 3[13] \end{cases} \Rightarrow 3^{49}\equiv 3[13]$$

$$3^{45}\equiv 3[13] \Rightarrow 5\times 3^{45}+k\equiv 2+k\,[13]$$

13 تقسم $5\times 3^{49}+k$ يعني : $2+k\equiv 0[13]$

$$2+k\equiv 0[13] \Leftrightarrow k\equiv 11[13]$$

$$k\in 13\mathbb{Z}+\{11\}$$

تمرين 2

$b\geq 2; a\geq 2$

q خارج القسمة الإقليدية ل : b على a

حدد باقي و خارج القسمة الإقليدية ل : $(b+1)a^{99}-1$ على a^{100}

الحل

$$b=aq+r \quad ; \quad 0\leq r\leq a-1$$

$$ba^{99}+a^{99}-1=a^{100}q+a^{99}+ra^{99}-1 \; ; \; 0\leq ra^{99}+a^{99}\leq a^{100}$$

$$(b+1)a^{99}-1=a^{100}q+\left(a^{99}(r+1)-1\right) \; ; \; 0\leq\left(a^{99}(r+1)-1\right)\leq a^{100}-1$$

تمرين3

أ- حدد باقي القسمة الإقليدية ل : 6^{532} على 11

ب - $a=3\times 6^{4592}+4\times 6^{75}+6$

بين أن : 11 تقسم a

الحل

أ-

$$\begin{cases} (Ferma)\; 6^{10}\equiv 1[11] \\ 6^{2}\equiv 3[11] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6^{530}\equiv 1[11] \\ 6^{2}\equiv 3[11] \end{cases} \Rightarrow 6^{532}\equiv 3[11]$$

ب -

$$\begin{cases} 6^{4590}\equiv 1[11] \\ 6^{2}\equiv 3[7] \end{cases} \Rightarrow 6^{4592}\equiv 3[11] \Rightarrow 3\times 6^{4592}\equiv 9[11]$$

$$\begin{cases} 6^{70}\equiv 1[11] \\ 6^{5}\equiv 10[7] \end{cases} \Rightarrow 6^{75}\equiv 10[11] \Rightarrow 4\times 6^{4592}\equiv 7[11]$$

$$3\times 6^{4592}+4\times 6^{75}+6\equiv 16[11]$$

$$6\equiv 6[11]$$

$$a\equiv 22[11] \Rightarrow a\equiv 0[11]$$

تمرين4

$p\in IP-\{2\}$ و $n\in\mathbb{Z}$

أ- بين أن : $n^{p}\equiv n[2]$

ب- استنتج أن : $(n+1)^{p}-(n^{p}+1)\equiv 0[2p]$

الحل

أ- $n^{p}-n=n(n^{p-1}-1)=n(n-1)(n^{p-2}+\cdots+n+1)$

$n(n-1)$ زوجي إذن : $n^{p}-n$ زوجي

و منه : $n^{p}\equiv n[p]$

ب- حسب فيرما

$$\begin{cases} (n+1)^{p}\equiv n+1[p] \\ n^{p}\equiv n[p] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n+1)^{p}\equiv n+1[p] \\ n^{p}+1\equiv n+1[p] \end{cases} \Rightarrow (n+1)^{p}-(n^{p}+1)\equiv 0[p]$$

و من أ-

$$\begin{cases} (n+1)^{p}\equiv n+1[2] \\ n^{p}\equiv n[2] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (n+1)^{p}\equiv n+1[2] \\ n^{p}+1\equiv n+1[2] \end{cases} \Rightarrow (n+1)^{p}-(n^{p}+1)\equiv 0[2]$$

إذن :

$$\begin{cases} (n+1)^{p}-(n^{p}+1)\equiv 0[p] \\ (n+1)^{p}-(n^{p}+1)\equiv 0[2] \end{cases} \Rightarrow (n+1)^{p}-(n^{p}+1)\equiv 0[2p]$$

تمرين5

$(a;n;m;k)\in\mathbb{N}^{*}$

$p\in IP$

بين أن :

أ - $a^{n(p-1)+m}-a^{k(p-1)+m}\equiv 0[p]$

ب – استنتج أن :

$$a^{12n+m}-a^{12k+m}\equiv 0[70]$$

الحل

أ – إذا كان : p يقسم a

فإن : $a^{n(p-1)+m}-a^{k(p-1)+m}\equiv 0[p]$

– إذا كان : p يقسم a

فإن : $Ferma\,;a^{p-1}\equiv 1[p]\Rightarrow\begin{cases}a^{n(p-1)+m}\equiv a^{m}[p]\\ a^{k(p-1)+m}\equiv a^{m}[p]\end{cases}$

إذن : $a^{n(p-1)+m}-a^{k(p-1)+m}\equiv 0[p]$

ب – من أ :

$$(1)\ a^{6\times 2n+m}-a^{6\times 2k+m}\equiv 0[7]\Rightarrow a^{12n+m}-a^{12k+m}\equiv 0[7]$$

$$(2)\ a^{4\times 3n+m}-a^{4\times 3k+m}\equiv 0[5]\Rightarrow a^{12n+m}-a^{12k+m}\equiv 0[5]$$

$$(3)\ a^{1\times 12n+m}-a^{1\times 12k+m}\equiv 0[2]\Rightarrow a^{12n+m}-a^{12k+m}\equiv 0[2]$$

من : $(3);(2);(1)$

$$7/a^{12n+m}-a^{12k+m};5/a^{12n+m}-a^{12k+m};2/a^{12n+m}-a^{12k+m}$$

إذن : $7\vee 5\vee 2/a^{12n+m}-a^{12k+m}$

و منه : $70/a^{12n+m}-a^{12k+m}$

إذن : $a^{12n+m}-a^{12k+m}\equiv 0[70]$

تمرين6

$(a;b)\in\mathbb{Z}^2$ و $p\in IP$

أ- بين أن : $a\equiv b[p]\Leftrightarrow a^{p}\equiv b^{p}[p]$

ب- بين أن : $a^{p}\equiv b^{p}[p]\Rightarrow a^{p}\equiv b^{p}\left[p^{2}\right]$

الحل

أ- $(\Rightarrow)$ بما أن : الموافقة منسجمة مع الضرب

فإن : $a\equiv b[p]\Rightarrow a^{p}\equiv b^{p}[p]$

$(\Leftarrow)$

$$\begin{cases}Ferma\begin{cases}a^{p}\equiv a[p]\\ b^{p}\equiv b[p]\end{cases}\Rightarrow a\equiv b[p]\\ a^{p}\equiv b^{p}[p]\end{cases}$$

ب – من أ :

$$a^{n}\equiv b^{n}[p]\Rightarrow a\equiv b[p]\Rightarrow a=pq+b$$

$$a^{p}=(pq+b)^{p}=\sum_{i=0}^{p}C_{p}^{i}(pq)^{i}b^{p-i}$$

$$a^{p}=b^{p}+C_{p}^{1}pq\times b^{p-1}+\sum_{i=2}^{p}C_{p}^{i}(pq)^{i}b^{p-i}$$

$$C_{p}^{1}=p$$

إذن : $a^{p}=b^{p}+p^{2}q\times b^{p-1}+\sum_{i=2}^{p}C_{p}^{i}(pq)^{i}b^{p-i}$

$$a^{p}-b^{p}=p^{2}q\times b^{p-1}+\sum_{i=2}^{p}C_{p}^{i}(pq)^{i}b^{p-i}$$

لدينا : $p^{2}/\sum_{i=2}^{p}C_{p}^{i}(pq)^{i}b^{p-i}$

إذن : $p^{2}/\left(a^{p}-b^{p}\right)$

و منه : $a^{p}\equiv b^{p}[p]\Rightarrow a^{p}\equiv b^{p}\left[p^{2}\right]$

تمرين 7

$$a=n(n+1)(n+5)$$

بين أن : $a\equiv 0[6]$

الحل

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5
$n+1\equiv$	1	2	3	4	5	0
$n+5\equiv$	5	0	1	2	3	4
$a\equiv$	0	0	0	0	0	0

تمرين 8

$n\in\mathbb{N}$

بين أن : $7(n(n+1))^{2}\equiv 0[28]$

الحل

$$2/n(n+1)\equiv 0[2]\Rightarrow 4/(n(n+1))^{2}$$

إذن : $4/7(n(n+1))^{2}$

ولدينا : $7/7(n(n+1))^{2}$

إذن : $4\vee 7/7(n(n+1))^{2}$

و منه : $28/7(n(n+1))^{2}$

تمرين9

بين أن : $n^{2}(n^{2}-1)\equiv 0[12]$

الحل

$$n^{2}(n^{2}-1)=n(n-1)(n+1)\equiv 0[12]$$

تمرين10

$n\in\mathbb{N}$

حدد n بحيث : 7 تقسم $n^{2}+3n-3$

الحل

$$n^{2}+3n-3\equiv 0[7]\Rightarrow n^{2}+3n-3-7n+7\equiv 0[7]$$

$$\Rightarrow n^{2}-4n+4\equiv 0[7]$$

$$\Rightarrow (n-2)^{2}\equiv 0[7]$$

$$\Rightarrow n-2\equiv 0[7]$$

$$\Rightarrow n\equiv 5[7]$$

إذن : $n\in 7\mathbb{N}+\{5\}$

تمرين11

$n\in\mathbb{N}$

بين أن : $(n+1)^{n}\equiv 1\left[n^{2}\right]$

الحل

$$(n+1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k n^k\ ;\ C_n^1=n$$

$$(n+1)^n=C_n^0n^0+C_n^1n^1+\sum_{k=2}^{n}C_n^k n^k$$

$$(n+1)^n=1+n^2+\sum_{k=2}^{n}C_n^k n^k$$

$$(n+1)^n=1+n^2\left(1+\sum_{k=2}^{n}C_n^k n^{k-2}\right)$$

إذن : $(n+1)^n\equiv 1\left[n^2\right]$

تمرين 12

$n\in\mathbb{Z}\quad;\quad(a;b;d)\in\mathbb{Z}^{*3}$

$a=nb+d$

بين أن : $a\wedge b=b\wedge d$

الحل

$$b\wedge d\,/\,b\ ;\ b\wedge d\,/\,d\Rightarrow b\wedge d\,/\,b\ ;b\wedge d\,/\,nb+d$$

$$\Rightarrow b\wedge d\,/\,b\ ;b\wedge d\,/\,a$$

$$\Rightarrow b\wedge d\,/\,a\wedge b$$

$$a\wedge b\,/\,b\ ;\ a\wedge b\,/\,a\Rightarrow a\wedge b\,/\,b\ ;a\wedge b\,/\,nb+d$$

$$\Rightarrow a\wedge b\,/\,b\ ;a\wedge b\,/\,d$$

$$\Rightarrow a\wedge b\,/\,b\wedge d$$

تمرين 13

حل في $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$(E)\quad \overline{2}x^2-\overline{3}x+\overline{4}=\overline{1}$

الحل

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}x^2$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$-\overline{3}x$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$
(E)	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$

$S=\left\{\overline{3}\right\}$

تمرين 14

حل في $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$$(S)\quad\begin{cases}\overline{5}x+\overline{4}y=\overline{1}\\ \overline{6}x+\overline{3}y=\overline{2}\end{cases}$$

الحل

$$(S)\Rightarrow\begin{cases}\overline{5}x+\overline{4}y+\overline{6}x+\overline{3}y=\overline{1}+\overline{2}\\ \overline{6}x+\overline{3}y=\overline{2}\end{cases}$$

$$(S)\Rightarrow\begin{cases}\overline{4}x=\overline{3}\\ \overline{6}x+\overline{3}y=\overline{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overline{4}x=\overline{24}\\ \overline{6}x+\overline{3}y=\overline{2}\end{cases}$$

$$(S)\Rightarrow\begin{cases}x=\overline{6}\\ \overline{6}x+\overline{3}y=\overline{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\overline{6}\\ \overline{3}y=\overline{1}\end{cases}$$

$$(S)\Rightarrow\begin{cases}x=\overline{6}\\ \overline{3}y=\overline{15}\end{cases}$$

$$(S)\Rightarrow\begin{cases}x=\overline{6}\\ y=\overline{5}\end{cases}$$

$$S=\left\{\left(\overline{6};\overline{5}\right)\right\}$$

تمرين15

1 - بين أن 131 أولي

2- حل في $\mathbb{Z}/133\mathbb{Z}$

$(E)\quad \overline{132}x^2+\overline{129}x-\overline{139}=0$

الحل

1 - الأعداد الأولية الأصغر من : $\sqrt{133}$ لا تقسم 133

إذن : 133 أولي

-2 في : $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: $\left(\overline{3}\neq\overline{0}\ ;\overline{4}\neq\overline{0}\,mais\ \overline{3}\times\overline{4}=\overline{0}\right)$

$$(E)\Rightarrow\overline{132}x^2+\overline{129}x-\overline{139}=0$$

$$\Rightarrow x^2-\overline{2}x-\overline{8}=0$$

$$\Rightarrow x^2-\overline{2}x+\overline{1}-\overline{9}=0$$

$$\Rightarrow\left(x-\overline{4}\right)\left(x+\overline{2}\right)=0;\mathbb{Z}/131\mathbb{Z}\,corps$$

$$\Rightarrow\left(x-\overline{4}\right)=0\ \ ou\ \ \left(x+\overline{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow x=\overline{4}\ \ ou\ \ x=\overline{-2}=\overline{129}$$

$$\boxed{S=\left\{\overline{129};\overline{5}\right\}}$$

تمرين16

حل في $\mathbb{Z}^2$

أ- $8x=9y$

ب- $8x+6y=12$

الحل

أ- $Gauss\ \begin{cases}8/9y\\ 8\wedge 9=1\end{cases}\Rightarrow 8/y\Rightarrow\exists k\in\mathbb{Z};y=8k$

إذن : $8x=9\times 8k\Rightarrow x=9k$

$S=\left\{(9k\,;8k)\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

ب- $8\wedge 6=2$

$8x+6y=12\Leftrightarrow 4x+3y=6$

$(3;-2)$ حل خاص ل $4x+3y=6$

(نستعمل مضاعفات 4 و 3 لتحديد الحل الخاص)

الحل الخاص موجود لأن : $4\wedge 3=1 \Leftrightarrow 4u+3v=1$

$\Leftrightarrow 4\times 6u+3\times 6v=6$

(يمكن كذلك استعمال خوارزمية إقليدس لتحديد الحل الخاص)

$$4x+3y=6 \Rightarrow \begin{cases}4x+3y=6\\ 4\times 3+3\times(-2)=6\end{cases}$$

$$\Rightarrow 4(x-3)+3(y+2)=0$$

$$\Rightarrow 4(x-3)=-3(y+2)$$

$$\Rightarrow 3/4(x-3)\ ;\ 4\wedge 3=1$$

$$\Rightarrow 3/(x-3)$$

$$\Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\ x=3k+3$$

إذن : $-3(y+2)=4\times 3k \Rightarrow y=-4k-2$

$$S=\{(3k+3;-4k-2)\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$$

تمرين 17

أ- حل في $\mathbb{Z}^2$: $(E)\quad 13x-38y=2$

ب- ما هي القيم الممكنة ل : $x\wedge y$

ج- حدد S' حلول (E) في حالة : $x\wedge y\neq 1$

د- حدد S'' حلول (E) في حالة : $x\wedge y=1$

الحل

أ –

$$(E)\Rightarrow 13x=38y+2$$

$$\Rightarrow 13x=2(19y+1)$$

$$\Rightarrow 2/13x\ ;\ 2\wedge 13=1$$

$$\Rightarrow 2/x$$

$$\Rightarrow \exists x'\in\mathbb{Z}\ ;\ x=2x'$$

$$(E)\Rightarrow 13\times 2x'-38y=2$$

$$\Rightarrow 13x'-19y=1$$

$(3;2)$ حل خاص ل $13x'-19y=1$

$$13x'-19y=1\Rightarrow 13(x'-3)-19(y-2)=0$$

$$\Rightarrow 13(x'-3)=19(y-2)$$

$$\Rightarrow 19/(x'-3)$$

$$\Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z}/\ x'=19k+3$$

$$x'=19k+3\Rightarrow 13\times 19k=19(y-2)$$

$$\Rightarrow \boxed{y=13k+2}$$

$$x'=19k+3\ ;\ x=2x'\Rightarrow \boxed{x=38k+6}$$

$$\boxed{S=\{(38k+6;13k+2)\ /\ k\in\mathbb{Z}\}}$$

ب- $x\wedge y\ /\ x\ et\ x\wedge y\ /\ y\Rightarrow x\wedge y\ /(13x-38y)$

$$\Rightarrow x\wedge y\ /2$$

إذن : $x\wedge y=1$ أو $x\wedge y=2$

ج- حلول (E) في حالة : $x\wedge y\neq 1$

$$x\wedge y\neq 1\Rightarrow x\wedge y=2$$

$$\Rightarrow 2/13k+2$$

$$\Rightarrow 2/13k\ \ ;\ 2\wedge 13=1$$

$$\Rightarrow 2/k$$

$$\boxed{S'=\{(38k+6;13k+2)\ /\ k\in 2\mathbb{Z}\}}$$

د- حلول (E) في حالة : $x\wedge y=1$

$$\boxed{S''=\{(38k+6;13k+2)\ /\ k\in 2\mathbb{Z}+\{1\}\}}$$

تمرين 18

$(a;b;c)\in\mathbb{Z}^{*3}$

بين أن : $a\wedge b=1\Rightarrow a\wedge(bc)=a\wedge c$

الحل

$$a\wedge c/a\ ;a\wedge c/c\Rightarrow a\wedge c/a\ ;a\wedge c/bc$$

$$\Rightarrow a\wedge c/a\wedge(bc)$$

$$a\wedge b=1\Rightarrow \exists(u;v)\in\mathbb{Z}\ ;\ au+bv=1$$

$$\Rightarrow \exists(u;v)\in\mathbb{Z}\ ;\ acu+bcv=c$$

$$a\wedge(bc)/a\ ;a\wedge(bc)/bc\Rightarrow a\wedge(bc)/a\ ;\ a\wedge(bc)/acu+bcv$$

$$\Rightarrow a\wedge(bc)/a\ ;a\wedge(bc)/c$$

$$\Rightarrow a\wedge(bc)/a\wedge c$$

إذن : $a\wedge b=1\Rightarrow a\wedge(bc)=a\wedge c$

تمرين 19

بين أن : $a\in\mathbb{N}^*-\{1\}\ ;\ n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

$$a^n+1\ premier\Rightarrow a\ paire$$

الحل

الإستلزام المضاد للعكس

$$a\ impaire\Rightarrow a^n+1\ non\ premier$$

$$a\ impaire\Rightarrow a^n\ impaire$$

$$\Rightarrow a^n+1\ paire$$

$$\Rightarrow a^n+1\ non\ premier$$

تمرين 20

$\overline{12551}_{(10)}$ يكتب في الأساس (b) على شكل : $\overline{30407}_{(b)}$

حدد : b

الحل

العدد 7 يوجد في $\overline{30407}_{(b)}$

إذن : $b>7$

$$\overline{30407}_{(b)}=3b^4+4b^2+7=12551$$

$$3b^4+4b^2-12544=0$$

$$\Delta=388^2$$

$$b^2=64\ ou\ b^2=\frac{-196}{3}$$

إذن : $\boxed{b=8}$

تمرين21

$\overline{xyz}_{(7)} = \overline{zyx}_{(9)}$

حدد : $x ; y ; z$

الحل

الأعداد $x ; y ; z$ أصغر قطعا من 7

$$\overline{xyz}_{(7)} = \overline{zyx}_{(9)} \Leftrightarrow x \times 7^2 + y \times 7 + z = z \times 9^2 + y \times 9 + x$$
$$\Leftrightarrow 48x - 2y - 80z = 0$$
$$\Leftrightarrow 24x - y - 40z = 0$$
$$\Leftrightarrow y = 8(3x - 5z)$$

بما أن : $y < 7$ و $8/7$

فإن : $y = 0$

$$3x - 5z = 0 \Leftrightarrow 3x = 5z$$

ومنه : $\Rightarrow 3/z \;;\; 5/x$

$$\Rightarrow z = 3 \;;\; x = 5$$

$$\boxed{z = 3; y = 0; x = 5}$$

تمرين22

حدد في نظمة العد ذات الأساس 7 باقي القسمة الإقليدية ل $\overline{12015051}_{(7)}$ على 7^3

الحل

$$\overline{12015051}_{(7)} = 1\times 7^7 + 2\times 7^6 + 1\times 7^4 + 5\times 7^3 + 5\times 7 + 1$$
$$= 7^3\left(1\times 7^4 + 2\times 7^3 + 1\times 7 + 5\right) + 5\times 7 + 1$$
$$= 7^3\left(1\times 7^4 + 2\times 7^3 + 1\times 7 + 5\right) + \overline{51}_{(7)}$$

باقي القسمة الإقليدية ل $\overline{12015051}_{(7)}$ على 7^3

هو : $\boxed{\overline{51}_{(7)}}$