ثانوية الجولان التأهيلية
بيوكرى

الثانية بكالوريا
علوم رياضية

فرض منزلي رقم : 02

السنة الدراسية : 2010 – 2011

الأستاذ : أحمد مومني

مسألة:

الجزء الأول:

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي.

$$\begin{cases} f(x) = Arc\tan\left(\sqrt[3]{2-x} - \sin\left(\sqrt[3]{2-x}\right)\right) & , \quad x \in]-\infty, 2] \\ f(x) = Arc\tan\left(x - 2 - \sqrt{x^2-4}\right) & , \quad x \in]2, +\infty[\end{cases}$$

و (C_f) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 – a – أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b – استنتج الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

c – أدرس اشتقاق الدالة f على يمين النقطة 2 ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها

2 – نضع

$$(\forall x \in]-\infty, 2]) \qquad g(x) = \sqrt[3]{2-x} - \sin\left(\sqrt[3]{2-x}\right)$$

a – بين أن:

$$\forall x \in]-\infty, 2[\left(\exists c_x \in]x, 2[\right) : \frac{3g(x)}{x-2} = -\left(\frac{1-\cos\left(\sqrt[3]{2-c_x}\right)}{\sqrt[3]{\left(2-c_x\right)^2}}\right)$$

b – استنتج $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{f(x)}{x-2}$ ثم أول النتيجة المحصل عليها هندسيا

3 – a – أحسب $f'(x)$ على كل من المجالين $]2, +\infty[$ و $]-\infty, 2[$

b – ضع جدولا لتغيرات الدالة f

4 – بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J يجب تحديده

5– أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ المنحنى (C_f) و $(C_{f^{-1}})$

(نأخذ $Arc\tan 2 \approx 1{,}1$ و $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$)

الجزء الثاني:

1– لتكن h الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$h(x) = 2 + \tan\left(f(x+2)\right) \qquad \forall x \in [1, +\infty[$$

a – بين أن:

$$(\forall x \in [1, +\infty[) \qquad \frac{2}{x+2} < h(x) < \frac{2}{x}$$

b – استنتج أن:

$$(\forall x \in [1, +\infty[) \qquad \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} < h(x) < \frac{2}{x}$$

c – بين أن: $(\forall x \geq 0) : \quad x - \sin x \geq 0$

2– نعتبر المتتاليتين العدديتين $(U_n)_{n\geq1}$ و $(V_n)_{n\geq1}$ المعرفتين كما يلي:

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{n^2}{k}\right) = h\left(\frac{n^2}{1}\right) + h\left(\frac{n^2}{2}\right) + \cdots + h\left(\frac{n^2}{n}\right)$$

$$V_n = Arc\tan\left(\sqrt[3]{2+n} - \sin\left(\sqrt[3]{2+n}\right)\right)$$

a – بين أن : $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b – بين أن :

$$\left(\frac{n+1}{n}\right) - \left(\frac{2(n+1)(2n+1)}{3n^3}\right) < U_n < \frac{n+1}{n}$$

c – استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

d – بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 0 < V_n \leq \frac{\pi}{2}$

e – استنتج أن المتتالية $(V_n)_{n\geq1}$ متقاربة