2014-13	فرض رقم 4	2SM

ليكن n عدد من $\mathbb{N}^*$ و نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $x \neq 0$; $f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}}$ و $f_n(0)=0$

الجزء الأول :

1) أ- بين أن f_n متصلة على يمين $x_0=0$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على يمين $x_0=0$

2) أ- أحسب المشتقة $f_n^{/}(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$

ب- أدرس تغيرات الدالة f_n و ضع جدول تغيراتها

3) أ- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n)

ب- أرسم المنحنى (C_2)

الجزء الثاني :

1) أ- بين أن المعادلة $f_n(x)=1$ تقبل حلا وحيدا U_n

ب- بين أن $U_n > 1$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

2) أ- بين أن $f_n(U_{n+1}) = e^{\frac{1}{U_{n+1}}}$

ب- استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

3) أ- بين أن $U_n \ln U_n = n$

ب- بين أن الدالة $g(x) = x\ln x$ تقابل من المجال $[1,+\infty[$ نحو مجال يتم تحديده و استنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

4) أ- بين العلاقة $\ln U_n + \ln(\ln U_n) = \ln n \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

ب- استنتج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln U_n}{\ln n}$

5) نعتبر $I_n = \int_{U_n}^{U_{n+1}} f_n(t)\,dt$ لكل n عدد من $\mathbb{N}^*$ ونضع $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} I_k$

أ- بين أن $1 \le \dfrac{I_n}{U_{n+1}-U_n} \le e^{\frac{1}{U_{n+1}}}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_n}{U_{n+1}-U_n}$

ب- أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

الجزء الثالث :

لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$x \neq 0$; $F(x) = \int_x^{2x} f_2(t)\,dt$ و $F(0)=0$

1) أ- بين أن $0 < e^{-\frac{2}{t}} < 1$ $(\forall t > 0)$

ب- بين أن F متصلة و قابلة للاشتقاق على يمين $x_0=0$

2) أ- بين أن $e^t \ge t+1$ $(\forall t \in \mathbb{R})$

ب- بين أن $F(x) \ge -2x + \frac{3}{2}x^2$ $(\forall x > 0)$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

ج- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (Γ_F) عند $+\infty$

3) أ- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

و بين أن $F'(x) = \left(4e^{\frac{1}{x}} - 1\right) f_2(x)$

ب- أدرس تغيرات الدالة F و أنجز جدول التغيرات

4) أرسم المنحنى (Γ_F)

5) أ- بين أن $x^2 e^{-\frac{2}{x}} \le F(x) \le 2x^2 e^{-\frac{1}{x}}$ $(\forall x > 0)$

ب- بين أن $e^x > ex$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ و استنتج أن $F\left(\sqrt{\frac{e}{2}}\right) < \sqrt{\frac{e}{2}}$

6) أ- بين أن $F(x) \ge x$ $(\forall x \ge U_2)$

ب- استنتج أن $\alpha = \int_\alpha^{2\alpha} f_2(t)\,dt$ $\left(\exists \alpha \in \left[\sqrt{\frac{e}{2}}, U_2\right]\right)$

حظ سعيد