2004

لتكن E مجموعة المصفوفات M_a من $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ و التي تكتب على الشكل $M_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$ و F مجموعة المصفوفات N_a من $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ بحيث $N_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a-\frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}$ مع $a \in \mathbb{R}^*$

1) أ- بين أن $(\forall (a,b)\in \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*)\ M_a\times M_b = M_{ab}$

ب- ليكن φ التطبيق المعرف من $\mathbb{R}^*$ نحو E بحيث $\varphi(a)=M_a$

بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$

ج- استنتج البنية الجبرية ل $(E,\times)$

2) أ- بين أن $(\forall (a,b)\in \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*)\ N_a\times N_b = M_{\frac{b}{a}}$

ب- نضع $G = E\cup F$. بين أن $(G,\times)$ زمرة .

هل هي تبادلية ؟

تمرين

نعتبر في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ المجموعة E للمصفوفات $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix}$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

1) أ- بين أن $(E,+)$ زمرة تبادلية

ب- بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء حقيقي و أعط بعده

2) أحسب $M(a,b)\times M(c,d)$

3) نعتبر التطبيق f المعرف من E نحو $\mathbb{C}$ كما يلي :

$$f:\ E\to\mathbb{C}$$
$$M(a,b)\to z=(a-b)+ib\sqrt{2}$$

أ- بين أن f تقابل و عرف تقابله العكسي

ب- بين أن f تشاكل من $(E,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$

ج- استنتج بنية $(E,+,\times)$

د- حدد مقلوب M من E عندما يكون ممكنا

2007

[I ليكن $E=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. لكل زوج (a,b) من E^2

نضع $a\perp b = a+b-ab\sqrt{2}$

1) أ- تحقق أن :

$$(\forall (a,b)\in E^2)\ \ a\perp b=\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)$$

ب- استنتج أن $\perp$ قانون تركيب داخلي في E

2) بين أن $(E\ ,\perp)$ زمرة تبادلية

[II $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 . نذكر أن $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي وأن $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

لتكن F مجموعة المصفوفات من $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ و التي تكتب على الشكل $M(a)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-a & a\\ a & \sqrt{2}-a\end{pmatrix}$

حيث $a\in E$ و نضع $A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

1) أ- تحقق أن $A^2=2A$ وأن $M(a)=I+\frac{a}{\sqrt{2}}A$

ب- بين أن F جزء مستقر من $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

2) نعتبر التطبيق :

$$\varphi:(E,\perp)\to(F,\times)$$
$$a\to\varphi(a)=M(a)$$

أ- بين أن φ تشاكل

تمرين

في الفضاء الحقيقي $(\mathrm{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ نعتبر المصفوفتين $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ و $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

و لتكن $\mathcal{E}$ مجموعة المصفوفات $M=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$

حيث $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

1) بين أن $(\mathcal{E}\ ,+,\cdot)$ فضاء حقيقي و حدد بعده

2) تحقق أن $A^2=A+2I$ و استنتج أن A تقبل مقلوبا A^{-1} و حدد A^{-1} بدلالة I , A

3) نضع $A^0=I$ و $A^n=A\times A^{n-1}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

أ- بين أن A^n تكتب على الشكل :

$(\forall n\in\mathbb{N})\ \ A^n=u_nA+v_nI$ محددا $(U_n)_n$ و $(V_n)_n$

ب- نضع $x_n=2u_n+v_n$; $y_n=u_n-v_n$

أحسب x_{n+1} ; y_{n+1} على التوالي بدلالة x_n , y_n

واستنتج A^n بدلالة n

4) بين أن $(\mathcal{E}\ ,+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية . هل هي كاملة ؟