سلسلة 1	الدوال الأسية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية

<u>تمرين 1</u> :

1

لدينا : $e^{4x-3}=1 \Leftrightarrow e^{4x-3}=e^{0} \Leftrightarrow 4x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$ ، منه : $\boxed{S=\left\{\frac{3}{4}\right\}}$

$e^{x-4}=0$ منه : $\boxed{S=\phi}$ (لأن : $e^{x-4}>0 \quad \forall x\in IR$)

لدينا : $e^{x^2-3x-3}=e \Leftrightarrow e^{x^2-3x-3}=e^{1} \Leftrightarrow x^2-3x-3=1 \Leftrightarrow x^2-3x-4=0$

منه ، $\Delta=9+16=25 \Rightarrow x_1=\frac{3+5}{2}=4 \quad et \quad x_2=\frac{3-5}{2}=-1$ منه : $\boxed{S=\{4\,;-1\}}$

$3e^{3x}-2e^{2x}-e^{x}=0 \Leftrightarrow e^{x}\left(3e^{2x}-2e^{x}-1\right)=0 \Leftrightarrow 3\left(e^{x}\right)^2-2e^{x}-1=0 \Leftrightarrow 3\left(e^{x}\right)^2-2e^{x}-1=0$

(لأن : $e^{x}>0 \quad \forall x\in IR$)

نضع $e^{x}=t$ منه : $3t^2-2t-1=0$ ، منه : $\Delta=4+12=16 \Rightarrow t=\frac{2+4}{6}=1 \quad ou \quad t=\frac{2-4}{6}=\frac{-1}{3}$

منه : $e^{x}=\frac{-1}{3}<0 \quad ou \quad e^{x}=1$ أي $e^{x}=e^{0}$ ، بالتالي: $\boxed{S=\{0\}}$

المتساويتان $e^{x}=0$ و $e^{x}=\frac{-1}{3}$ غير ممكنتان (لأن دالة الأس دائما موجبة قطعا) ،لذلك تم تجاوزهما.

$2^{x}=3^{1-2x} \Leftrightarrow \ln\left(2^{x}\right)=\ln\left(3^{1-2x}\right) \Leftrightarrow x\ln(2)=(1-2x)\ln(3)$

$\Leftrightarrow x\ln(2)=\ln(3)-2\ln(3)\,x \Leftrightarrow \left(\ln(2)-2\ln(3)\right)x=\ln(3) \Leftrightarrow x=\frac{\ln(3)}{\ln(2)-2\ln(3)}$

بالتالي : $\boxed{S=\left\{\frac{\ln(3)}{\ln\left(\frac{2}{9}\right)}\right\}}$

قد يبدو السؤال لا علاقة له بدالة الأس لكن الأمر غير ذلك ، فالكتابة 2^{x} و 3^{1-2x} هي كتابة لدوال أسية ذات الأسس 2 و 3 على التوالي و هذا يعني أن $2^{x}>0$ و $3^{1-2x}>0$ وهذا ما سمح باستعمال دالة اللوغاريتم النبيري في طرفي المتساوية

2

لحل المتراجحة $2e^{2x}-3e^{x}+1<0$ نضع : $e^{x}=t$

فنجد: $2t^2-3t+1<0$

$\Delta=9-8=1 \Rightarrow t=\frac{3+1}{4}=1 \quad ou \quad t=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
x^2-3	+	-	+	

منه : $t\in\left]\frac{1}{2},1\right[$ أي $\frac{1}{2}<t<1$

أي : $\frac{1}{2}<e^{x}<1$ أي : $\ln\left(\frac{1}{2}\right)<x<\ln(1)$

أي : $-\ln(2)<x<0$

بالتالي: $\boxed{S=\left]-\ln(2),0\right[}$

$e^{x}-2e^{-x}+1>0 \Leftrightarrow e^{x}-\frac{2}{e^{x}}+1>0$

لدينا : $\Leftrightarrow \frac{\left(e^{x}\right)^2-2+e^{x}}{e^{x}}>0$

$\Leftrightarrow \left(e^{x}\right)^2+e^{x}-2>0$

نضع : $e^{x}=t$ فنجد: $t^2+t-2<0$

$\Delta=1+8=9 \Rightarrow t=\frac{-1+3}{2}=1 \; ou \; t=\frac{-1-3}{2}=-2$

$e^{x}-2e^{-x}+1>0 \Leftrightarrow \left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}+2\right)>0$

$\Leftrightarrow \left(e^{x}-1\right)>0$

$\Leftrightarrow e^{x}>1 \Leftrightarrow x>0$

بالتالي: $\boxed{S=\left]0,+\infty\right[}$

في المتراجحة الثانية استعملنا طريقة التعميل لكوننا سنحصل على عامل موجب $e^{x}+2$ مما يسمح بربح الوقت.

تمرين 2 :

$$f(x)=e^{5x}$$

$$f'(x)=\left(e^{5x}\right)'=(5x)'\,e^{5x}=5\,e^{5x}$$

$$f(x)=e^{x+\ln(x)}$$

$$f'(x)=\left(e^{x+\ln(x)}\right)'=(x+\ln(x))'\,e^{x+\ln(x)}=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{x+\ln(x)}$$

$$f(x)=\ln(x)\,e^{x}$$

$$f'(x)=\left(\ln(x)\,e^{x}\right)'=(\ln(x))'\,e^{x}+\ln(x)\left(e^{x}\right)'$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}e^{x}+\ln(x)e^{x}=\left(\frac{1}{x}+\ln(x)\right)e^{x}$$

$$f(x)=\ln\left(e^{x}+1\right)$$

$$f'(x)=\left(\ln\left(e^{x}+1\right)\right)'=\frac{\left(e^{x}+1\right)'}{e^{x}+1}=\frac{e^{x}}{e^{x}+1}$$

$$f(x)=x^{x}$$

$$f'(x)=\left(x^{x}\right)'=\left(e^{\ln\left(x^{x}\right)}\right)'=\left(e^{x\ln(x)}\right)'=(x\ln(x))'\,e^{x\ln(x)}=\left(x'\ln(x)+x(\ln(x))'\right)e^{x\ln(x)}=(\ln(x)+1)\,e^{x\ln(x)}$$

لا يمكننا في هذا المثال الاشتقاق باستعمال القاعدة $\left(x^{r}\right)'=r\,x^{r-1}$ ، لكون الأس متغير و ليس بعدد ثابت، لذلك وجب علينا تغيير صيغة الدالة لإيجاد الخاصية المناسبة للاشتقاق

تمرين 3 : احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^{x}+2}{e^{x}+1}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^{x}\left(1+\frac{2}{e^{x}}\right)}{e^{x}\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{e^{x}}\right)}{\left(1+\frac{1}{e^{x}}\right)}=\frac{1}{1}=1$$

$\lim_{x\mapsto-\infty}\sqrt{|x|}\,e^{x}$ نضع : $t=-x$ إذن : $\lim_{x\mapsto-\infty}\sqrt{|x|}\,e^{x}=\lim_{t\mapsto+\infty}\sqrt{|-t|}\,e^{-t}=\lim_{t\mapsto+\infty}\frac{\sqrt{t}}{e^{t}}=\lim_{t\mapsto+\infty}\frac{t}{e^{t}}\times\frac{1}{\sqrt{t}}=0\times0=0$

بصفة عامة عند حساب نهاية لدوال أسية عند $-\infty$ وعند الحصول على شكل غير محدد يستحسن استعمال تغيير للتغير $t=-x$ ، وذلك لكونه يحول النهاية لـ $+\infty$ وهو ما يسمح باستغلال أهم النهايات الخاصة للدوال الأسية

$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^{x}}{x^{n}}=+\infty$ هذه النهاية الخاصة تم استعمال مقلوبها ، أي $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^{n}}{e^{x}}=0$ حيث $n=1$

$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^{x}+1}{x^{3}}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^{x}}{x^{3}}+\frac{1}{x^{3}}=+\infty$ لأن : $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^{x}}{x^{3}}=+\infty$ و $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{x^{3}}=0$

$\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{e^{x}+x}{e^{x}+7}=-\infty$ لأن : $\lim_{x\mapsto-\infty}e^{x}=0$ و $\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{0+x}{0+7}=-\infty$

مثال سهل لكن الهدف منه أن تتعلم عدم تجاوز مرحلة التعويض قبل أية محاولة للتحميل أو ما شابه.

$$\lim_{x\mapsto0^{+}}\left(e^{x}-1\right).\ln(x)=\lim_{x\mapsto0^{+}}\frac{e^{x}-1}{x}.\,(x\ln(x))=1\times0=0$$

$$\lim_{x\mapsto0}\frac{e^{2x}-e^{x}}{x}=\lim_{x\mapsto0}\frac{e^{2x}-1-e^{x}+1}{x}=\lim_{x\mapsto0}\frac{e^{2x}-1}{x}-\frac{e^{x}-1}{x}=\lim_{x\mapsto0}2\frac{e^{2x}-1}{2x}-\frac{e^{x}-1}{x}=2\times1-1=1$$

$\lim_{x\mapsto0^{+}}(x+1)^{x}=\lim_{x\mapsto0^{+}}e^{x\ln(x+1)}=e^{0\times0}=1$

لا يصح التعويض بالطريقة : $\lim_{x\mapsto0^{+}}(x+1)^{x}=1^{0}=1$

$\lim_{x\mapsto0^{+}}x^{\sqrt{x}}=\lim_{x\mapsto0^{+}}e^{\sqrt{x}\ln(x)}$ نضع : $\sqrt{x}=t$ منه : $\lim_{x\mapsto0^{+}}x^{\sqrt{x}}=\lim_{t\mapsto0^{+}}e^{t\ln\left(t^{2}\right)}=\lim_{t\mapsto0^{+}}e^{2\,t\ln(t)}=e^{2\times0}=1$

	تمرين 4: $\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=u_n^3 \end{cases}$ و ، $n\in IN$ $\quad v_n=\ln(u_n)$
1	لدينا : $v_{n+1}=\ln(u_{n+1})=\ln(u_n^3)=3\ln(u_n)=3v_n$ إذن : v_n متتالية هندسية أساسها $q=3$ و حدها الأول : $v_0=\ln(u_0)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ منه : $v_n=v_0\ q^n=\ln\left(\frac{1}{2}\right)3^n$ منه : $\ln(u_n)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)3^n$ بالتالي : $u_n=e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)3^n}=e^{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{3^n}\right)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3^n}$
2	لدينا : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} -\ln(2)\,3^n=-\infty$ لأن : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 3^n=+\infty$ و $-\ln(2)<0$ منه : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n=\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \exp\left(-\ln(2)\,3^n\right)=0$

تمرين 5:

الدالة	الدالة الأصلية
$f(x)=e^{3x+1}$	$F(x)=\frac{1}{3}e^{3x+1}$
$f(x)=\frac{1+e^x}{e^x}$	$f(x)=\frac{1}{e^x}+1=e^{-x}+1 \quad \Rightarrow \quad F(x)=-e^{-x}+x=\frac{-1}{e^x}+x$
$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$	$f(x)=\frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)} \quad \Rightarrow \quad F(x)=\ln(e^x+1)$
$f(x)=\frac{e^x}{e^{2x}+1}$	$f(x)=\frac{(e^x)'}{(e^x)^2+1} \quad \Rightarrow \quad F(x)=\mathrm{Arctan}(e^x)$
$f(x)=(e^x+1)^2$	$f(x)=e^{2x}+2e^x+1 \quad \Rightarrow \quad F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+x$
$f(x)=\frac{1}{e^x+1}$	$f(x)=\frac{1+e^x-e^x}{e^x+1}=1-\frac{e^x}{e^x+1} \quad \Rightarrow \quad F(x)=x-\ln(e^x+1)$
$f(x)=\cos x\ e^{\sin x}$	$f(x)=(\sin x)'\ e^{\sin x} \quad \Rightarrow \quad F(x)=e^{\sin x}$
$f(x)=\sqrt{e^x}+\sqrt[3]{e^x}$	$f(x)=\sqrt{e^x}+\sqrt[3]{e^x}=e^{\frac{1}{2}x}+e^{\frac{1}{3}x} \quad \Rightarrow \quad F(x)=2e^{\frac{1}{2}x}+3e^{\frac{1}{3}x}=2\sqrt{e^x}+3\sqrt[3]{e^x}$
$f(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$	$f(x)=2\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}=2\left(\sqrt{x}\right)'e^{\sqrt{x}}=2\ e^{\sqrt{x}}$

- لم يطلب منا تحديد جميع الدوال الأصلية، لذلك إضافة الثابتة ليس ضروريا
- الدالة الأصلية للدالة e^{ax+b} هي $\frac{1}{a}e^{ax+b}$ حيث a و b عددان حقيقيان ثابتان و $a\neq 0$
- الدالة الأصلية للدالة $(u(x))'\ e^{u(x)}$ هي $e^{u(x)}$
- الدالة الأصلية للدالة $\frac{(u(x))'}{u(x)}$ هي $\ln(\lvert u(x)\rvert)$ ، الدالة الأصلية للدالة $\frac{(u(x))'}{u^2(x)+1}$ هي $\mathrm{Arctan}(u(x))$