الدوال الأسية

تمرين 1

حدد D_f : $f(x)=\dfrac{\sqrt{e^{3x}-5}}{\ln(28-3x)}$

الحل

تحديد D_f : $f(x)=\dfrac{\sqrt{e^{3x}-5}}{\ln(28-3x)}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R} / e^{3x}-5\geq 0 \, et \ln(28-3x)\neq 0 \, et \, 28-3x>0\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R} / x\geq\dfrac{\ln 5}{3} \, et x\neq 9 \, et \, x<\dfrac{28}{3}\right\}$

$$\boxed{D_f=\left[\dfrac{\ln 5}{3};9\right[\cup\left]9;\dfrac{28}{3}\right[}$$

تمرين 2

حل في $\mathbb{R}$: **-1** $e^{2x}-11e^{x}+30=0$

-2 $e^{3x}-2e^{2x}-e^{x}+2=0$

-3 $e^{\frac{6x}{2x-1}}-2e^{\frac{4x}{2x-1}}-e^{\frac{2x}{2x-1}}+2=0$

-4 $e^{2x}-15e^{x}+56\geq 0$

- 5 $\dfrac{2-3e^{-x}}{1-3e^{-x}}<\dfrac{1}{2}$

الحل

-1 $e^{2x}-11e^{x}+30=0$

نضع : $e^{x}=X$ إذن : $X>0$

إذن : $X^2-11X+30=0$

نجد : $X=7$ أو $X=8$

إذن : $e^{x}=6$ أو $e^{x}=5$

ومنه : $x=\ln 6$ أو $x=\ln 5$

$$\boxed{S=\{\ln 6;\ln 5\}}$$

-2 $e^{3x}-2e^{2x}-e^{x}+2=0$

$e^{3x}-2e^{2x}-e^{x}+2=e^{2x}(e^{x}-2)-(e^{x}-2)$

$=(e^{x}-2)(e^{2x}-1)$

$$\boxed{e^{3x}-2e^{2x}-e^{x}+2=(e^{x}-2)(e^{x}-1)(e^{x}+1)}$$

$e^{3x}-2e^{2x}-e^{x}+2=0\Leftrightarrow x=\ln 2 \; ou \; x=0$

$$\boxed{S=\{\ln 2;0\}}$$

-3 $e^{\frac{6x}{2x-1}}-2e^{\frac{4x}{2x-1}}-e^{\frac{2x}{2x-1}}+2=0$

مجموعة تعريف المعادلة هي : $\mathbb{R}-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

نضع : $e^{\frac{2x}{2x-1}}=X$ إذن : $X>0$

إذن : $X^3-2X^2-X+2=0$

و منه : $(X-2)(X-1)(X+1)=0$

إذن : $X=1$ أو $X=2$

و منه : $e^{\frac{2x}{2x-1}}=1$ أو $e^{\frac{2x}{2x-1}}=2$

إذن : $\dfrac{2x}{2x-1}=0$ أو $\dfrac{2x}{2x-1}=\ln 2$

و منه : $x=0$ أو $x=\dfrac{-\ln 2}{2(\ln 2-1)}$

$$\boxed{S=\left\{\dfrac{-\ln 2}{2(\ln 2-1)};0\right\}}$$

-4 $e^{2x}-15e^{x}+56\geq 0$

نضع : $e^{x}=X$ إذن : $X>0$

إذن : $X^2-15X+56\geq 0$

$X^2-15X+56=0\Leftrightarrow X=8$ أو $X=7$

إذن : $X^2-15X+56\geq 0$

يعني : $X\in\,]0;7]\cup[8;+\infty[$

يعني : $e^{x}\in\,]0;7]\cup[8;+\infty[$

يعني : $x\in\ln(]0;7]\cup[8;+\infty[)$

و بما أن : $\ln$ تزايدية

فإن : $x\in\left]\lim_{x\to 0^+}\ln x;\ln 7\right]\cup\left[\ln 8;\lim_{x\to+\infty}\ln x\right[$

$x\in\,]-\infty;\ln 7]\cup[\ln 8;+\infty[$

و منه : $\boxed{S=]-\infty;\ln 7]\cup[\ln 8;+\infty[}$

5 - $\dfrac{2-3e^{-x}}{1-3e^{-x}}<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{2e^{x}-3}{e^{x}-3}<\dfrac{1}{2}$

نضع : $e^{x}=X$ إذن : $X>0$

$\dfrac{2e^{x}-3}{e^{x}-3}<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{2X-3}{X-3}<\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{2X-3}{X-3}-\dfrac{1}{2}<0$

$\Leftrightarrow\dfrac{3X-3}{2(X-3)}<0$

$\Leftrightarrow X\in\,]1;3[$

$X\in\,]1;3[$

يعني : $e^{x}\in\,]1;3[$

يعني : $x\in \ln\left(\left]1;3\right[\right)$

و بما أن : $\ln$ تزايدية

فإن : $x\in \left]0;\ln 3\right[$

$$\boxed{S=\left]0;\ln 3\right[}$$

تمرين3

احسب النهايات التالية :

1 - $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{5x}}{x^3}$ -2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{7x}}{\sqrt[5]{x^2}}$

-3 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-5x}\sqrt[3]{x^2}$ -4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7+e^{5x}}{2-e^{3x}}$

-5 $\lim\limits_{x\to-\infty}x^9e^{4x}$ -6 $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{11}e^{\frac{3}{4}x}$

-7 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-3x}+1}{e^{2x}+e^{-x}}$ -8 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-e^{x}}{x^2+3x+1}$

الحل

-1 حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3}$

مباشرة : $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ شكل غير محدد

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^3}=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{5x}}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^3}\times\lim_{x\to+\infty}e^{4x}$$
$$=\left(+\infty\right)\times\left(+\infty\right)$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{5x}}{x^3}=+\infty}$

-2 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{7x}}{\sqrt[5]{x^2}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{7x}}{\sqrt[5]{x^2}}=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{35x}}{x^2}\right)^{\frac{1}{5}}$$
$$=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^2}\times\lim_{x\to+\infty}e^{34x}\right)^{\frac{1}{5}}$$
$$=\left(+\infty\times+\infty\right)^{\frac{1}{5}}$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{7x}}{\sqrt[5]{x^2}}}$

-3 بنفس الطريقة نجد : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-5x}\sqrt[3]{x^2}}$

-4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7+e^{5x}}{2-e^{3x}}$

نضع : $t=e^{x}$ و منه : $x\to+\infty\Leftrightarrow t\to+\infty$

إذن :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7+e^{5x}}{2-e^{3x}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{7+t^5}{2-t^3}$$
$$=-\lim_{t\to+\infty}t^2$$

و منه : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7+e^{5x}}{2-e^{3x}}=-\infty}$

-5

$$\lim_{x\to-\infty}x^9e^{4x}=\lim_{x\to-\infty}x^9e^{x}\lim_{x\to-\infty}e^{3x}$$
$$=0\times0^3$$

إذن : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}x^9e^{4x}=0}$

-6 حساب : $\lim\limits_{x\to-\infty}x^{11}e^{\frac{3}{4}x}$

نضع : $t=\dfrac{3}{4}x$ و منه : $x\to-\infty\Leftrightarrow t\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}x^{11}e^{\frac{3}{4}x}=\left(\frac{4}{3}\right)^{11}\lim_{t\to-\infty}t^{11}e^{t}$$
$$=\left(\frac{4}{3}\right)^{11}\times0$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}x^{11}e^{\frac{3}{4}x}=0}$$

-7 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-3x}+1}{e^{2x}+e^{-x}}$

نضع : $t=e^{-x}$ و منه : $x\to-\infty\Leftrightarrow t\to+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-3x}+1}{e^{2x}+e^{-x}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{-3}+1}{t^2+t^{-1}}$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^3+1}{t^5+t^2}$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^3}{t^5}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-3x}+1}{e^{2x}+e^{-x}}=0}$$

-8 $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-e^x}{x^2+3x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-e^x}{x^2+3x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2+3x+1} - \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+3x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2+3x+1} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+3x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{x^2}}{1+3\times\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{2-e^x}{x^2+3x+1} = -\infty}$$

تمرين4

حدد f' في كل حالة :

-1 $f(x) = \left(e^{2x}-5\right)\ln\left(3x+4\right)$

-2 $f(x) = \left(e^{3x}+4\right)\sqrt[3]{e^x+2}$

الحل

-1 $$f'(x) = \left(\left(e^{2x}-5\right)\ln\left(3x+4\right)\right)'$$

$$\boxed{f'(x) = 2e^{2x}\ln\left(3x+4\right) + \frac{3\left(e^{2x}-5\right)}{3x+4}}$$

-2 $$f'(x) = \left(\left(e^{3x}+4\right)\sqrt[3]{e^x+2}\right)'$$

$$\boxed{f'(x) = 3e^{3x}\sqrt[3]{e^x+2} + \frac{e^x\left(e^{3x}+4\right)}{3\sqrt[3]{e^x+2}^{\,2}}}$$

تمرين5

حل في $\mathbb{R}$:

1 - $2^x = 6$ -2 $2^x = 16$

3 - $10^x = 600$ -4 $10^x = 1000$

5 - $3^x < 7$ -6 $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 16$

-7 $9^x - 2\times 3^x + 1 = 0$

-8 $4^x - 2\times 2^x - 15 > 0$

9 - $1000^x - 10^x < 0$

-10 $2^{x+1} = 5^x$ -11 $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-11} = 125$

-12 $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt[4]{x}\right)^{1+\sqrt{x}}$

الحل

$a \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\}$

1 - $2^x = 6$

$$2^x = 6 \Leftrightarrow e^{x\ln 2} = 6$$
$$\Leftrightarrow x\ln 2 = \ln 6$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 6}{\ln 2}$$
$$S = \left\{\frac{\ln 6}{\ln 2}\right\}$$

أو :

$$2^x = 6 \Leftrightarrow \log_2\left(2^x\right) = \log_2\left(6\right)$$
$$\Leftrightarrow x = \log_2\left(6\right)$$
$$\boxed{S = \left\{\log_2\left(6\right)\right\}}$$

-2 $2^x = 16$

$$2^x = 16 \Leftrightarrow e^{x\ln 2} = 16$$
$$\Leftrightarrow x\ln 2 = \ln 16$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{4\ln 2}{\ln 2}$$
$$S = \left\{4\right\}$$

5 - $3^x < 7$

$$3^x < 7 \Leftrightarrow e^{x\ln 3} < 7$$
$$\Leftrightarrow x\ln 3 < \ln 7$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{\ln 7}{\ln 3}$$
$$\boxed{S = \left]-\infty; \frac{\ln 6}{\ln 2}\right[}$$

-6 $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 16$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 16 = 6 \Leftrightarrow e^{-x\ln 2} < 6$$
$$\Leftrightarrow -x\ln 2 < \ln 6$$
$$\Leftrightarrow x > -\frac{\ln 6}{\ln 2}$$
$$\boxed{S = \left]-\frac{\ln 6}{\ln 2}; +\infty\right[}$$

-7 $9^x - 2\times 3^x + 1 = 0$

$$9^x - 2\times 3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 2\times 3^x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(3^x - 1\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 3^x = 1$$
$$\Leftrightarrow x\ln 3 = 0$$
$$S = \{0\}$$

-8 $4^x - 2\times 2^x - 15 > 0$

$$4^x - 2\times 2^x - 15 > 0 \Leftrightarrow \left(2^x - 5\right)\left(2^x + 3\right) > 0$$
$$\Leftrightarrow 2^x \in \left]-\infty;-3\right[\cup \left]5;+\infty\right[$$

و لدينا : $2^x > 0$

إذن : $2^x \in \left]5;+\infty\right[$

بما أن : $2 > 1$

فإن : $\log_2$ تزايدية قطعا

إذن : $\log_2\left(2^x\right) \in \log_2\left(\left]5;+\infty\right[\right)$

و منه : $x \in \left(\left]\log_2(5);+\infty\right[\right)$

$$\boxed{S = \left]\log_2(5);+\infty\right[}$$

-10 $2^{x+1} = 5^x$

$$2^{x+1} = 5^x \Leftrightarrow e^{(x+1)\ln 2} = e^{x\ln 5}$$
$$\Leftrightarrow (x+1)\ln 2 = x\ln 5$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 5 - \ln 2}$$

أو

$$2^{x+1} = 5^x \Leftrightarrow 2\times 2^x = 5^x$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = 2$$
$$\Leftrightarrow x = \log_{\frac{5}{2}}(2)$$

- 11 $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-11} = 125$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-11} = 125 \Leftrightarrow 5^{11-x^2} = 5^3$$
$$\Leftrightarrow \log_5\left(5^{11-x^2}\right) = \log_5\left(5^3\right)$$
$$\Leftrightarrow 11 - x^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow 9 - x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \pm 3$$

-12 $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt[4]{x}\right)^{1+\sqrt{x}}$

مجموعة تعريف المعادلة : $\mathbb{R}^{+*} - \{1\}$

$$x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt[4]{x}\right)^{1+\sqrt{x}} \Leftrightarrow x^{\sqrt{x}} = x^{\frac{1+\sqrt{x}}{4}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1+\sqrt{x}}{4}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3}$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

مسألة1

I - نعتبر الدالة g المعرفة على $\left]-\infty;0\right[$ بما يلي :

$$g(x) = x + 1 + \ln(-x)$$

بين أن : $\forall x \in \left]-\infty;0\right[\ : g(x) \le 0$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x\ln(-x) & x \in \left]-\infty;0\right[\\ f(0) = 0 & \\ f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} & x \in \left]0;+\infty\right[\end{cases}$$

-1 بين أن : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

-2 بين أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ ثم أول النتيجة هندسيا .

-3 أ- بين أن : f متصلة في 0

-4 بين أن : $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$

أول النتيجة هندسيا .

-5 بين أن : $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

أول النتيجة هندسيا .

-6 أ -بين أن :

$$\begin{cases} f'(x) = 2g(x) & x \in]-\infty;0[\\ f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}} & x \in]0;+\infty[\end{cases}$$

ب- استنتج أن : f تناقصية على المجال : $]-\infty;0[$

تزايدية على المجال : $]0;e]$

تناقصية على المجال : $[e;+\infty[$

7- بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$

أول النتيجة هندسيا .

8- أ- بين أن (C_f) يقبل النقطة ذات الأفصول -1 نقطة انعطاف

ب- حدد معادلة المماس ل (C_f) عند النقطة ذات الأفصول -1

ج- حدد معادلة المماس ل (C_f) عند النقطة ذات الأفصول 1

9- ضع جدول تغيرات f ثم أنشئ (C_f) التمثيل المبياني ل f على معلم متعامد ممنظم

(الوحدة $2cm$) $e^{\frac{1}{e}} \simeq 1,5$ ؛ $e \simeq 2,7$

III) احسب $A(\Delta)$ مساحة الحيز المحصور بين C_g و المستقيمين $x=-e$ و $x=-1$

حل المسألة1

I - نعتبر x من $]-\infty;0[$

$$g(x) = x+1+\ln(-x)$$

$$g'(x) = \frac{x+1}{x}$$

x	$-\infty$		-1		0
$g(x)$		$\nearrow$	$g(-1)$	$\searrow$	

من جدول التغيرات نستنتج :

$$\forall x \in]-\infty;0[\ : g(x) \le g(-1)$$

بما أن : $g(-1) = 0$

فإن : $\boxed{\forall x \in]-\infty;0[\ : g(x) \le 0}$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x\ln(-x) & x \in]-\infty;0[\\ f(0) = 0 \\ f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} & x \in]0;+\infty[\end{cases}$$

-1

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 + 2x\ln(-x) = \lim_{t\to+\infty} t^2 - 2t\ln(t)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to+\infty} t^2\left(1 - 2\frac{\ln(t)}{t}\right)$$

بما أن : $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(t)}{t} = 0$ فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty(1-0)$

إذن: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$

2- نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^0$

و منه : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$

$\boxed{y=1 \text{ مقارب ل } (C_f) \text{ بجوار } +\infty}$

3- أ-

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} x^2 + 2x\ln(-x)$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{t\to0^+} t^2 - 2t\ln(t)$$

بما أن : $\lim\limits_{t\to0^+} t\ln(t) = 0$ فإن :

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = 0 - 0$$

و منه : $\boxed{\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0}$

- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{\ln x}{x}}$

نضع : $t = \dfrac{\ln(x)}{x}$

إذا كان : $x \to 0^+$ فإن $t \to -\infty$

إذن: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{t\to-\infty} e^t$

و منه : $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0}$

و لدينا : $f(0) = 0$

إذن: $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0)$

إذن: f متصلة في 0

-4 $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{x^2+2x\ln(-x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^-} x + 2\ln(-x)$
$= 0 - \infty$

إذن: $\boxed{\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty}$

و منه : (C_f) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى يسار

النقطة ذات الأفصول 0

-5

$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{x} e^{\frac{\ln x}{x}} \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\ln x}$

حساب : $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{x} e^{\frac{\ln x}{x}}$

نضع : $t = \dfrac{\ln(x)}{x}$

إذا كان : $x \to 0^+$ فإن $t \to -\infty$

إذن: $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{x} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim\limits_{t\to-\infty} te^t = 0$

و لدينا : $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\ln x} = -\infty$

إذن: $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 \times 0$

و منه : $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0}$

إذن: (C_f) يقبل نصف مماس أفقي يمين النقطة ذات الأفصول 0

-6 أ -

$$\begin{cases} f'(x) = 2g(x) & x \in]-\infty;0[\\ f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}} & x \in]0;+\infty[\end{cases}$$

ب- بما أن : $\forall x \in]-\infty;0[\ : g(x) \le 0$

فأن : f تناقصية على المجال : $]-\infty;0[$

لدينا : $1 - \ln x \ge 0 \Leftrightarrow x \le e$

إذن : f تزايدية على المجال : $]0;e]$

و f تناقصية على المجال : $[e;+\infty[$

-7 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2x\ln(-x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x + 2\ln(-x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{t\to+\infty} -t + 2\ln(t)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{t\to+\infty} t\left(-1 + 2\dfrac{\ln(t)}{t}\right)$

و لدينا : $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(t)}{t} = 0$

إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty(-1+0)$

إذن: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty}$

و منه : محور الأراتيب اتجاه مقارب ل (C_f) بجوار $-\infty$

-8 أ- لدينا : $x \in]-\infty;0[\qquad f'(x) = 2g(x)$

إذن: $x \in]-\infty;0[\qquad f''(x) = 2g'(x)$

و حسب I- : $g'(-1) = 0$ و $g'(x)$ تتغير إشارتها بجوار -1

إذن: $f''(-1) = 0$ و $f''(x)$ تتغير إشارتها بجوار -1

و منه : (C_f) يقبل النقطة ذات الأفصول -1 نقطة انعطاف

ب- لدينا : $f(-1) = 1$ و $f'(-1) = 0$

إذن: $y = 1$ هي معادلة المماس ل (C_f) عند النقطة ذات الأفصول -1

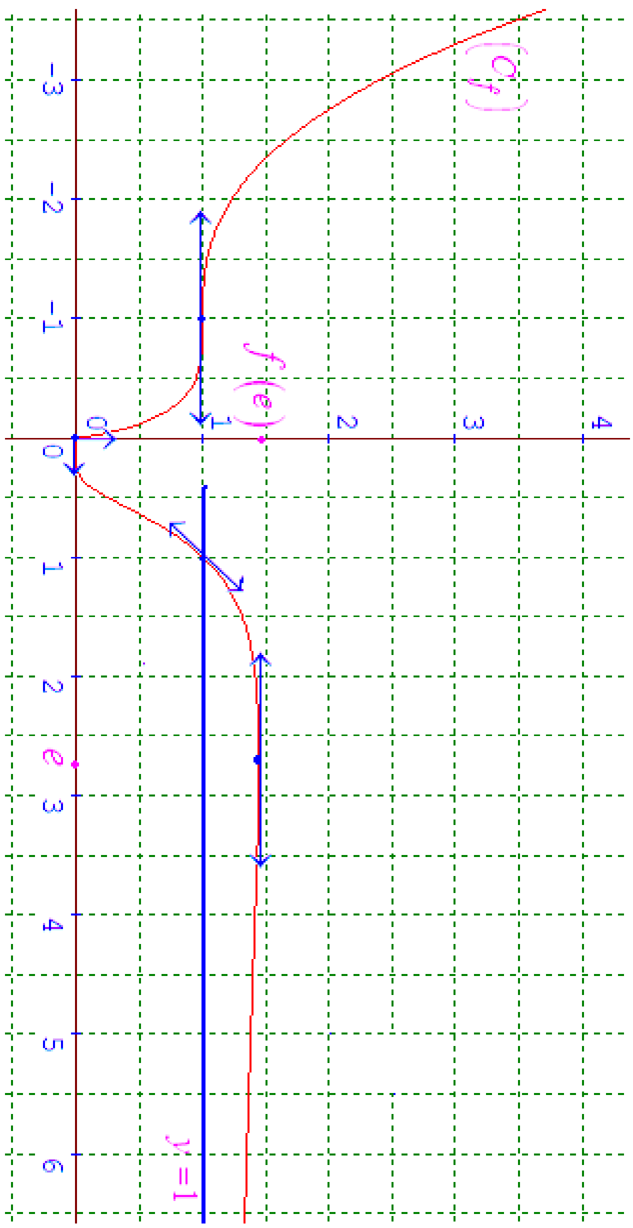
ج- لدينا : $f(1) = 1$ و $f'(1) = 1$

إذن: $y = x$ هي معادلة المماس ل (C_f) عند النقطة ذات الأفصول 1

9-جدول تغيرات f

x	$-\infty$		0		e		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$e^{\frac{1}{e}}$	↘	1

إنشاء (C_f)



(الوحدة $2cm$) $\quad e^{\frac{1}{e}} \simeq 1,5 \quad ؛ \quad e \simeq 2,7$

III) حساب $A(\Delta)$ مساحة الحيز المحصور بين C_g و المستقيمين $x=-e$ و $x=-1$

لدينا : $\forall x \in]-\infty;0[\;:\; g(x) \le 0$

إذن : $g(x) \le 0$ سالبة على المجال $[-e;-1]$

و منه : $A(\Delta) = -\int_{-e}^{-1} g(x)dx$

و لدينا : $f'(x) = 2g(x)$ على المجال $]-\infty;0[$

إذن : $A(\Delta) = -\frac{1}{2}\int_{-e}^{-1} f'(x)dx$

و منه : $A(\Delta) = -\frac{1}{2}\left[f(x)\right]_{-e}^{-1}$

إذن : $A(\Delta) = -\frac{1}{2}\left[x^2 + 2x\ln(-x)\right]_{-e}^{-1}$

إذن : $\boxed{A(\Delta) = \frac{1}{2}\left(e^2 - 2e - 1\right)}$

مسألة2

I -1- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$g(x) = -x + \frac{1}{2} + \ln(x)$$

بين أن : $\forall x \in]0;+\infty[\;:\; g(x) < 0$

2 - بين أن : حل المتراجحة $2e^{2x} + e^x - 1 \ge 0$

في المجال $]-\infty;0]$ هو المجال $[-\ln 2;0]$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = e^{2x} + e^x - x & x \in]-\infty;0] \\ f(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln(x) - \dfrac{x^3}{3} + 2 & x \in]0;+\infty[\end{cases}$$

1- بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

2- بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + x = 0$

أول النتيجة هندسيا .

3- بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

4 - بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$

أول النتيجة هندسيا .

5- أ - بين أن : f متصلة في 0

6- بين أن : $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 2$

أول النتيجة هندسيا .

7- بين أن : $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$

أول النتيجة هندسيا .

8- أ -بين أن :

$$\begin{cases} f'(x) = 2e^{2x} + e^x - 1 & x \in]-\infty;0] \\ f'(x) = xg(x) & x \in]0;+\infty[\end{cases}$$

ب- استنتج أن : f تناقصية على المجال : $]-\infty;-\ln 2]$

تزايدية على المجال : $[-\ln 2;0]$

تناقصية على المجال : $]0;+\infty[$

9- ضع جدول تغيرات f ثم أنشئ التمثيل (C_f) المبياني

ل f على معلم متعامد ممنظم

(الوحدة $2cm$) $f(-\ln 2)\simeq 1,44$ ؛

$f(2,36)\simeq 0$

$\ln 2 = 0.7$

حل المسألة2

I -1- لدينا : $\forall x\in]0;+\infty[: g(x) = -x+\frac{1}{2}+\ln(x)$

إذن : $\forall x\in]0;+\infty[: g(x) = \frac{1-x}{x}$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	‖ $\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$

من جدول التغيرات نستنتج :

$\forall x\in]0;+\infty[\ : g(x)\leq g(1)$

بما أن : $g(1) = -\frac{1}{2}$

فإن : $\boxed{\forall x\in]0;+\infty[\ : g(x) < 0}$

2 - حل المتراجحة: $2e^{2x}+e^{x}-1\geq 0$ في المجال $]-\infty;0]$

نضع : $e^{x} = X$ إذن : $X\in]0;1]$

إذن : $2X^2+X-1\geq 0$

نجد : $X = -1$ أو $X = \frac{1}{2}$

و منه : $2X^2+X-1\geq 0$

يعني : $X\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

يعني : $e^{x}\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

يعني : $x\in \ln\left(\left[\frac{1}{2};1\right]\right)$

و بما أن : $\ln$ تزايدية

فإن : $x\in\left[\ln\frac{1}{2};\ln 1\right]$

إذن : $x\in[-\ln 2;0]$

و منه : $\boxed{S = [-\ln 2;0]}$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = e^{2x}+e^{x}-x & x\in]-\infty;0] \\ f(x) = \frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^3}{3}+2 & x\in]0;+\infty[\end{cases}$$

1-لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}+e^{x}-x\right)$

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0+0+\infty$

و منه : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$

2- لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}+e^{x}\right)$

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right) = 0+0$

و منه : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x = 0}$

إذن : $\boxed{y=-x \text{ مقارب ل } (C_f) \text{ بجوار } -\infty}$

3- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^3}{3}+2$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{x}-\frac{1}{3}+\frac{2}{x^3}\right)$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\left(0-\frac{1}{3}+0\right)$

و منه : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$

4 – لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{3}+\frac{2}{x}$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{x}-\frac{1}{3}+\frac{2}{x^3}\right)$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = +\infty\left(0-\frac{1}{3}+0\right)$

و منه : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = -\infty}$

إذن : $\boxed{\text{محور الأراتيب اتجاه مقارب ل } (C_f) \text{ بجوار } +\infty}$

5- أ- بين أن : f متصلة في 0

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} e^{2x}+e^{x}-x = 1+1-0$$

و منه : $\boxed{\lim_{x\to0^-} f(x)=2}$

لدينا : $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^3}{3}+2$

بما أن : $\lim_{t\to0^+} x^2\ln(x)=0$

فإن : $\lim_{x\to0^-} f(x)=0-0+2$

و منه : $\boxed{\lim_{x\to0^+} f(x)=2}$

لدينا : $f(x)=e^{2x}+e^{x}-x$ لكل x من $\left]-\infty;0\right]$

بما أن : $0\in\left]-\infty;0\right]$ فإن : $f(0)=1+1-0$

إذن: $\boxed{f(0)=2}$

و منه : $\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^+} f(x)=f(0)$

إذن: $\boxed{f \text{ متصلة في } 0}$

6- لدينا : $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{2x}+e^{x}-x-2}{x-0}$

حساب : $\lim_{x\to0^-}\frac{e^{2x}+e^{x}-x-2}{x-0}$

نضع : $g(x)=e^{2x}+e^{x}-x$

g متصلة قابلة للإشتقاق في $\mathbb{R}$

$g'(x)=2e^{2x}+e^{x}-1$ ؛ $g(0)=2$ ؛ $g'(0)=2$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{e^{2x}+e^{x}-x-2}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

إذن : $\lim_{x\to0^-}\frac{e^{2x}+e^{x}-x-2}{x-0}=g'(0)$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{e^{2x}+e^{x}-x-2}{x-0}=2$$

و منه : $\boxed{\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2}$

حساب : $\lim_{x\to0^-}\frac{e^{2x}+e^{x}-x-2}{x-0}$ بطريقة أخرى

$$\lim_{x\to0^-}\frac{e^{2x}+e^{x}-x-2}{x-0}=2\lim_{x\to0^-}\frac{e^{2x}-1}{2x}+\lim_{x\to0^-}\frac{e^{x}-1}{x}-1$$

لدينا : $\lim_{x\to0^-}\frac{e^{x}-1}{x}=1$ و $\lim_{x\to0^-}\frac{e^{2x}-1}{2x}=1$

إذن : $\lim_{x\to0^-}\frac{e^{2x}+e^{x}-x-2}{x-0}=2+1-1=2$

و منه : $\boxed{\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2}$

إذن : f قابلة للإشتقاق يسار 0 و $f'_g(0)=2$

و منه : (C_f) يقبل نصف مماس أفقي يسار النقطة ذات الأفصول 0 معادلته : $y=2x+2$

7- لدينا :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{3}$$

نعلم أن : $\lim_{x\to0^+} x\ln(x)=0$

إذن : $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0-0$

و منه : $\boxed{\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0}$

إذن: f قابلة للإشتقاق يمين 0 و $f'_d(0)=0$

و منه : (C_f) يقبل نصف مماس أفقي يمين النقطة ذات الأفصول 0

8- أ -

$$\begin{cases} f'(x)=2e^{2x}+e^{x}-1 & x\in\left]-\infty;0\right] \\ f'(x)=xg(x) & x\in\left]0;+\infty\right[\end{cases}$$

ب- من I-1 : $\forall x\in\left]0;+\infty\right[\ : g(x)<0$

و لدينا : $\forall x\in\left]-\infty;0\right[\ : f'(x)=xg(x)$

إذن: $\boxed{f \text{ تناقصية على المجال : } \left]0;+\infty\right[}$

من I-2 :- حل المتراجحة $2e^{2x}+e^{x}-1\geq0$

في المجال $\left]-\infty;0\right]$ هو المجال $\left[-\ln 2;0\right]$

و لدينا : $\forall x\in\left]-\infty;0\right] : f'(x)=2e^{2x}+e^{x}-1$

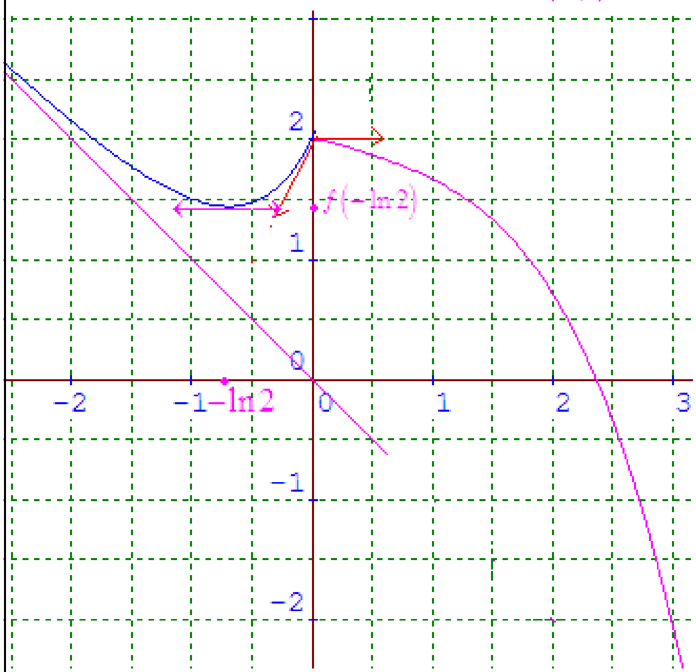
إذن : $\boxed{f \text{ تناقصية على المجال : } \left]-\infty;-\ln 2\right]}$

$\boxed{f \text{ تزايدية على المجال : } \left[-\ln 2;0\right]}$

-9 جدول تغيرات f

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$f(-\ln 2)$	$\nearrow 2$	$\searrow -\infty$

إنشاء (C_f)



(الوحدة $2cm$) $f(-\ln 2) \simeq 1,44$ ؛ $f(2,36) \simeq 0$

$\ln 2 = 0.7$

مسألة3

I -1- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$g(x) = (1-x)e^x - 1$$

بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} \ : \ g(x) \leq 0$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} & x \in \mathbb{R}^* \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

-1 بين أن : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

-2 بين أن : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + x = 0$

أول النتيجة هندسيا

-3 بين أن : لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x) = \dfrac{x}{e^x} \times \dfrac{1}{1 - e^{-x}}$

استنتج أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

أول النتيجة هندسيا

-4 أ- بين أن : f متصلة في 0

-5 أ - بين أن :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{\left(e^x - 1\right)^2} \qquad x \in \mathbb{R}^*$$

-6 ضع جدول تغيرات f ثم أنشئ (C_f) التمثيل المبياني ل f على معلم متعامد ممنظم (الوحدة $2cm$)

نقبل أن : f قابلة للإشتقاق في 0