التمرين الأول

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $x \neq 1$; $f(x) = (x-1)\arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)$ و $f(1) = 0$

1) أ- أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0 = 1$

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0 = 1$

2) بين أن المستقيم $x = 1$ محور تماثل للمنحنى (C_f)

3) أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

4) أ- بين أن $f'(x) = \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{x-1}{1+(x-1)^2}$

ب- بين أن $\arctan t > \frac{t}{1+t^2}$ $(\forall t > 0)$ و أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]1, +\infty[$

5) أرسم المنحنى (C_f)

التمرين الثاني

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

1) بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أحسب المشتقة $f'(x)$

2) أدرس منحى تغيرات الدالة f

3) أ- بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J يتعين تحديده

ب- بين أن $f^{-1}(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\forall x \in J)$

4) بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل في المجال $]0,1[$ حلا وحيدا a

5) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة كما يلي : $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ- بين أن $0 \leq U_n < a$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

ج- حدد نهاية المتتالية $(U_n)_n$

التمرين الثالث

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = 2x - 1 + \arctan x$

1) أ- أحسب المشتقة $f'(x)$ و أنجز جدول تغيرات الدالة f

ب- استنتج أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} يتم تحديد مجموعة تعريفها D

2) أ- بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α و بين أن $0 < \alpha < 1$

ب- بين أن $f(x) > x$ $(\forall x > \alpha)$

3) لتكن $(U_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $U_0 = a > \alpha$ و $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$

أ- بين أن $U_n > \alpha$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

4) أ- بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق على D و أن $\left|\left(f^{-1}\right)'(x)\right| \leq \frac{1}{2}$ $(\forall x \in D)$

بـ باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_{n+1}-\alpha\leq\frac{1}{2}(U_n-\alpha)$

جـ بين أن $(U_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها

التمرين الرابع

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $x<1\ ;\quad f(x)=\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{1-x}}\right)$ و $f(1)=\frac{\pi}{2}$

1) أـ أدرس اتصال الدالة f على يسار النقطة $x_0=1$

بـ أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0=1$ على اليسار

2) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

3) اعط معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول $a=-1$

4) احسب المشتقة $f'(x)$ أنجز جدول تغيرات الدالة f

5) أـ بين أن f تقابل من $\left]-\infty,1\right]$ نحو مجال J يتم تحديده

بـ بين أن الدالة f^{-1} قابلة للاشتقاق في النقطة $b=0$ و أحسب $\left(f^{-1}\right)'(0)$

6) أرسم المنحنيين (C_f) و $(C'_{f^{-1}})$ في نفس المعلم

التمرين الخامس

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) & ;\quad x>1\\ f(x)=x\arctan\sqrt[3]{x^2} & ;\quad x\leq1\end{cases}$$

1) أـ بين أن f متصلة في النقطة $x_0=0$

بـ أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين و على يسار النقطة $x_0=0$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

2) أـ أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

بـ بين أن المنحنى يقبل عند $-\infty$ فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم $y=-\frac{\pi}{2}x$

(نذكر أن $(\forall t>0)\ ar\tan t+\arctan\frac{1}{t}=\frac{\pi}{2}$)

3) أـ أحسب المشتقة $f'(x)$ على كل من $]1,+\infty[$ و المجال $]-\infty,1[$

بـ أدرس تغيرات الدالة f ثم ضع جدول تغيراتها

4) ليكن g قصور الدالة f على المجال $]1,+\infty[$

أـ بين أن g تقابل من المجال $]1,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده

بـ أحسب $g^{-1}(x)$ لكل x من المجال J

5) أرسم المنحنيين (C_f) و (C'_g) في نفس المعلم