مبرهنة رول و مبرهنة التزايدات المنتهية:

التمرين رقم 01 (مبرهنة Taylor – Lagrange)

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق $(n+1)$ مرة على مجال I من $\mathbb{R}$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

ليكن a و b عددين حقيقيين من المجال I بحيث $a \langle b$

نضع : $$\Psi(x)=f(b)-\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x)\frac{(b-x)^k}{k!}-\frac{(b-x)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}}\left(f(b)-\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!}\right)$$

1 – أحسب $\Psi'(x)$ لكل $x \in]a,b[$

2 – بين أنه يوجد عدد حقيقي c من المجال $]a,b[$ بحيث :

$$f(b)-f(a)=f'(a)\frac{(b-a)}{1!}+f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!}+f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

3 – لتكن f دالة قابلة للاشتقاق 3 مرات على مجال I من $\mathbb{R}$. وليكن a وb عددين حقيقيين من المجال I بحيث : $a \langle b$

بين أنه يوجد عدد حقيقي c من المجال $]a,b[$ بحيث:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a)+\frac{1}{2}(b-a)f''(a)+\frac{1}{6}(b-a)^2 f'''(c)$$

التمرين رقم 02: (Règle de L'Hospital)

لتكن f و g دالتين عدديتين متصلتين على مجال $[a,b]$ و قابلتين للاشتقاق على المجال $]a,b[$

1 – بين أنه: $\big(f(b)-f(a)\big)g'(c)=\big(g(b)-g(a)\big)f'(c)$ $\quad (\exists c \in]a,b[):$

2 – نفترض أن $g'(x)\neq 0$ $\quad (\forall x \in]a,b[):$

ليكن $x_0 \in [a,b]$ بحيث $f(x_0)=g(x_0)=0$

a – بين أن: $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$

b – استنتج $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{Arc\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{4}{\pi}x-1\right)}$

التمرين رقم 03:

1 – بين أن: $|\sin x-\sin y|\leq|x-y|$ $\quad (\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2):$

$|\cos x-\cos y|\leq|x-y|$ $\quad (\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2):$

2 – لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي

$$f(x)=\sin(\cos x)-\cos(\sin x)$$

a - بين أن: $f(x) \langle -2\sin\left(\frac{x+\sin x}{2}\right)\sin\left(\frac{x-\sin x}{2}\right)$ $\quad \left(\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right):$

بين أن: $\cos(\sin x) \rangle 0$ و $\sin(\cos x)\leq 0$ $\quad \left(\forall x \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\right):$

استنتج أن: $f(x) \langle 0$ $\quad (\forall x \in \mathbb{R}):$

- الثانية علوم رياضية - ثانوية الجولان التأهيلية - بيوكرى -

AHMED MOUMNI