المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2023

RS 24	الموضوع	SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SSS

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4h
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

تعليمات:

- مدة الاختبار هي أربع ساعات.
- يتضمن موضوع الاختبار أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن أن تنجز التمارين حسب الترتيب الذي يختاره المترشح.

- التمرين1 يتعلق بالتحليل..(10 نقط)
- التمرين2 يتعلق بالأعداد العقدية....................................(3.5 نقطة)
- التمرين3 يتعلق بالبنيات الجبرية....................................(3.5 نقطة)
- التمرين4 يتعلق بالحسابيات..(3 نقط)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر

التمرين1 : (10 نقط)

الجزء I:

لكل عدد صحيح طبيعي **غير منعدم** n ، نعتبر الدالة f_n المعرفة على $I=[0,+\infty[$ بما يلي :

$$f_n(0)=0 \quad \text{و} \quad f_n(x)=\sqrt{x}(\ln x)^n \quad ; \quad (\forall x\in]0,+\infty[)$$

وليكن (C_n) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.5 — 1- أ) تحقق أن: $(\forall x\in]0,+\infty[)\ ;\ \sqrt{x}(\ln x)^n=(2n)^n\left(x^{\frac{1}{2n}}\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n$ ، استنتج أن f_n متصلة على اليمين في 0

0.25 — ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

0.75 — ج) تحقق أن: $(\forall x\in]0,+\infty[)\ ;\ \dfrac{f_n(x)}{x}=(2n)^n\left(\dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}}\right)^n$ ، استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.5 — د) احسب، حسب زوجية n ، $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f_n(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.75 — 2- أ) بين أن f_n قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و أن :

$$(\forall x\in]0,+\infty[)\ ;\quad f_n'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1}(2n+\ln x)$$

0.25 — ب) تحقق أن لكل $n\geq 2$: $f_n'(x)=0$ تكافئ ($x=1$ أو $x=e^{-2n}$)

1 — ج) ادرس، حسب زوجية n ، منحى تغيرات f_n و اعط جدول تغيراتها.

0.25 — د) بين أنه إذا كان n فرديا و $n\geq 3$ فإن النقطة ذات الأفصول 1 هي نقطة انعطاف (C_n)

الجزء II:

1- ليكن $\beta\in]1,e[$ عددا حقيقيا ثابتا. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\quad u_n=f_n(\beta)$$

0.25 — أ) بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\quad 0<u_n<\sqrt{e}$

0.25 — ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ تناقصية.

0.25 — ج) حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

0.5 — 2- أ) بين أنه لكل عدد صحيح n غير منعدم، يوجد عدد حقيقي وحيد $x_n\in]1;e[$ بحيث: $f_n(x_n)=1$

0.75 — ب) بين أن المتتالية المعرفة $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تزايدية، استنتج أنها متقاربة.

3- نضع: $\ell = \lim_{n\to+\infty} x_n$

أ) بين أن: $1 < \ell \le e$ | 0.5

ب) بين أن: $\lim_{n\to+\infty} (\ln x_n)^n = \frac{1}{\sqrt{\ell}}$ | 0.25

ج) بين أنه إذا كان $\ell < e$ فإن $\lim_{n\to+\infty} n\ln(\ln x_n) = -\infty$ | 0.25

د) استنتج قيمة ℓ | 0.25

الجزء III:

نضع لكل $x \in I$ ، $F(x) = \int_x^1 \left(f_1(t)\right)^2 dt$

1- أ) بين أن الدالة F متصلة على I | 0.25

ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء مرتين، بين أن: | 1

$$\left(\forall x \in]0,+\infty[\right) ; F(x) = -\frac{x^2}{2}\ln^2(x) + \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{1}{4}(1-x^2)$$

2- أ) احسب $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)$ | 0.5

ب) استنتج قيمة $F(0)$ | 0.25

ج) احسب، ب cm^3 ، حجم المجسم المولد بدوران جزء المنحنى (C_1) الموافق للمجال $[0,1]$ دورة كاملة حول محور الأفاصيل. (نأخذ $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$) | 0.5

<u>التمرين2</u>: (3.5 نقطة)

يمكن أن ينجز الجزءان I و II بشكل مستقل.

الجزء I:

نعتبر في $\mathbb{R}_+^2$ النظمة التالية:

$$(S): \begin{cases} \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{x+y}\right) = \frac{12}{5} \\ \sqrt{y}\left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = \frac{4}{5} \end{cases}$$

1- ليكن $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ حلا للنظمة (S) . نضع: $z = \sqrt{x} + i\sqrt{y}$

أ) بين أن: $z + \frac{1}{z} = \frac{12}{5} + \frac{4}{5}i$ | 0.25

ب) بين أن: $z^2 - \left(\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i\right)z + 1 = 0$ ، استنتج القيم الممكنة للعدد z | 0.75

(نلاحظ أن: $\frac{28}{25} + \frac{96}{25}i = \left(\frac{2}{5}(4+3i)\right)^2$)

ج) استنتج قيم الزوج (x,y) | 0.25

2- حل في $\mathbb{R}_+^2$ النظمة (S) | 0.5

الجزء II:

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

لتكن (U) الدائرة التي مركزها O و شعاعها 1 و $A(a)$ و $B(b)$ و $C(c)$ ثلاث نقط مختلفة مثنى مثنى من (U)

0.25 | 1- بين أن: $\left(\forall z \in \mathbb{C}\right) \;;\; |z|=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{1}{z}$

0.5 | 2- أ) المستقيم المار من A و الموازي للمستقيم (BC) يقطع الدائرة (U) في النقطة $P(p)$

بين أن: $p=\dfrac{bc}{a}$

0.5 | ب) المستقيم المار من A و العمودي على المستقيم (BC) يقطع الدائرة (U) في النقطة $Q(q)$

بين أن: $q=-p$

0.5 | ج) المستقيم المار من C و الموازي للمستقيم (AB) يقطع الدائرة (U) في النقطة $R(r)$

بين أن المستقيمين (PR) و (OB) متعامدان.

<u>التمرين3:</u> (3.5 نقطة)

نذكر أن $\left(M_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ حلقة واحدية و غير تبادلية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

ليكن $E=\left\{M(a,b,c)=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&-c\\0&c&b\end{pmatrix} / (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$

0.25 | 1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $\left(M_3(\mathbb{R}),+\right)$

2- نزود المجموعة $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي:

$$\forall\left((x,z),(x',z')\right)\in(\mathbb{R}\times\mathbb{C})^2 \;;\; (x,z)*(x',z')=(x+x',z+z')$$

و نعتبر التطبيق φ المعرف من E نحو $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ بما يلي:

$$\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \;,\; \varphi\left(M(a,b,c)\right)=(a,b+ci)$$

0.5 | أ) بين أن φ تشاكل من $(E,+)$ نحو $(\mathbb{R}\times\mathbb{C},*)$ و أن $\varphi(E)=\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

0.25 | ب) استنتج أن $(\mathbb{R}\times\mathbb{C},*)$ زمرة تبادلية.

3- نزود $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ بقانون التركيب الداخلي T المعرف بما يلي:

$$\forall\left((x,z),(x',z')\right)\in(\mathbb{R}\times\mathbb{C})^2 \;;\; (x,z)T(x',z')=\left(x\operatorname{Re}(z')+x'\operatorname{Re}(z),\, zz'\right)$$

($\operatorname{Re}(z)$ هو الجزء الحقيقي للعدد العقدي z)

0.25 | أ) بين أن T تبادلي.

0.25 | ب) تحقق أن $(0,1)$ هو العنصر المحايد للقانون T في $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

0.5 | ج) تحقق أن $\forall x\in\mathbb{R} \,,\, (1,i)T(x,-i)=(0,1)$ ؛ استنتج أن T غير تجميعي في $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

4- ليكن $G=\left\{\left(\mathrm{Im}(z),\, z\right) / z\in \mathbb{C}\right\}$

($\mathrm{Im}(z)$ هو الجزء التخيلي للعدد العقدي z)

أ) بين أن G زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R}\times\mathbb{C}, *)$ — 0.25

(نلاحظ أن $(-\mathrm{Im}(z),-z)$ هو مماثل $(\mathrm{Im}(z),z)$ بالنسبة للقانون $*$)

ب) ليكن ψ التطبيق المعرف من $\mathbb{C}^*$ نحو $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ بما يلي: $\forall z\in\mathbb{C}^*\ ;\ \psi(z)=\left(\mathrm{Im}(z),z\right)$ — 0.25

بين أن ψ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(\mathbb{R}\times\mathbb{C},T)$

ج) استنتج أن $\left(G-\{(0,0)\},T\right)$ زمرة تبادلية. — 0.5

5- بين أن $(G,*,T)$ جسم تبادلي. — 0.5

<u>التمرين4:</u> (3 نقط)

ليكن p عددا أوليا فرديا. نضع: $S=1+p+p^2+p^3+\ldots+p^{p-1}$

ليكن q عددا أوليا يقسم S

1- أ) بين أن p و q أوليان فيما بينهما. — 0.5

ب) استنتج أن: $p^{q-1}\equiv 1\ [q]$ — 0.25

ج) تحقق أن: $p^p-1=(p-1)S$ ، استنتج أن: $p^p\equiv 1\ [q]$ — 0.5

2- نفترض أن p و $q-1$ أوليان فيما بينهما.

أ) باستعمال مبرهنة بوزوت (Bézout)، بين أن: $p\equiv 1\ [q]$ — 0.75

ب) استنتج أن $S\equiv 1\ [q]$ — 0.25

3- بين أن: $q\equiv 1\ [p]$ — 0.75

انتهى