المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2023

NS 24	الموضوع		SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SSS
المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4h
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

تعليمات:

- مدة الاختبار هي أربع ساعات.
- يتضمن موضوع الاختبار خمسة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن أن تنجز التمارين حسب الترتيب الذي يختاره المترشح.

- التمرين1 يتعلق بالتحليل...(7.75 نقطة)
- التمرين2 يتعلق بالتحليل...(2.25 نقطة)
- التمرين3 يتعلق بالأعداد العقدية..................................(3.5 نقطة)
- التمرين4 يتعلق بالحسابيات.......................................(3 نقط)
- التمرين5 يتعلق بالبنيات الجبرية...................................(3.5 نقطة)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر

<u>التمرين 1:</u> (7.75 نقطة)

الجزء I

1- أ) بين أن: $\forall t \in [0,+\infty[\ ;\ \frac{4}{(2+t)^2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{(1+t)^2}\right)$ 0.5

ب) استنتج أن: $\forall x \in [0,+\infty[\ ;\ \frac{2x}{2+x} \leq ln(1+x) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+2x}{1+x}\right)$ 0.5

2- لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي:

$$g(x)=\frac{ln(1+x)}{x}$$

بين أن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{g(x)-1}{x} = \frac{-1}{2}$ 0.5

الجزء II

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\forall x \in]0,+\infty[\ ;\ \ f(x)=g(x)e^{-x} \quad \text{و} \quad f(0)=1$$

و ليكن (C) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها. 0.5

2- أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0 0.25

ب) تحقق أن: $\forall x \in]0,+\infty[\ ;\ \frac{f(x)-1}{x}=\left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right)g(x)+\left(\frac{g(x)-1}{x}\right)$ 0.25

ج) استنتج أن f قابلة للاشتقاق علي اليمين في 0 و حدد $f'_d(0)$ 0.5

3- بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم أن: 0.75

$$\forall x \in]0,+\infty[\ ;\ f'(x)=\frac{x-(1+x)^2 ln(1+x)}{x^2(1+x)}e^{-x}$$

4- أ) بين أن: $\forall x \in]0,+\infty[\ ;\quad -\frac{3}{2} < \frac{x-(1+x)^2\ln(1+x)}{x^2(1+x)} < 0$ 0.5

ب) استنتج أن: $\forall x \in]0,+\infty[\ ;\quad -\frac{3}{2} < f'(x) < 0$ 0.25

5- أ) اعط جدول تغيرات الدالة f 0.25

ب) أنشئ المنحنى (C) مبرزا نصف المماس على اليمين في النقطة ذات الأفصول 0 0.75

(نأخذ $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$)

الجزء III

0.5 | 1- بين أن المعادلة ذات المجهول x : $f(x)=3x$ ، تقبل حلا وحيدا α في $]0,+\infty[$

2- ليكن $\beta \in \mathbb{R}^+$ و $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$\forall n\in \mathbb{N};\ u_{n+1}=\frac{1}{3}f(u_n) \quad \text{و} \quad u_0=\beta$$

0.5 | أ) بين أن: $\forall n\in \mathbb{N}\ ;\ u_n\geq 0$

0.5 | ب) بين أن: $\forall n\in \mathbb{N}\ ;\ |u_{n+1}-\alpha|\leq \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

0.5 | ج) بين بالترجع أن: $\forall n\in \mathbb{N}\ ;\ |u_n-\alpha|\leq \frac{1}{2^n}|\beta-\alpha|$

0.25 | د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in \mathbb{N}}$ تؤول إلى α

التمرين 2: (2.25 نقطة)

نعتبر الدالة العددية: $x\mapsto e^x$ و ليكن (Γ) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

لكل $n\in \mathbb{N}^*$ و لكل $k\in\{0;1;...;n\}$، نشير بالرمز M_k إلى نقطة المنحنى (Γ) ذات الإحداثيات $\left(\frac{k}{n}\ ;\ e^{\frac{k}{n}}\right)$

0.5 | 1- أ) بين أن: $\forall k\in\{0;1;...;(n-1)\}\quad \exists c_k\in \left]\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right[\ :\ e^{\frac{k+1}{n}}-e^{\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}e^{c_k}$

0.25 | ب) بين أن: $\forall k\in\{0;1;...;(n-1)\}\ ;\ M_kM_{k+1}=\frac{1}{n}\sqrt{1+e^{2c_k}}$

(M_kM_{k+1} هي المسافة من M_k إلى M_{k+1})

0.5 | ج) استنتج أن: $\forall k\in\{0;1;...;(n-1)\}\ ;\ \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}\leq M_kM_{k+1}\leq \frac{1}{n}\sqrt{1+e^{\frac{2(k+1)}{n}}}$

2- لتكن $(S_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\forall n\in \mathbb{N}^*\ ;\ S_n=\sum_{k=0}^{n-1}M_kM_{k+1}$

0.5 | أ) تحقق أن: $\forall n\in \mathbb{N}^*\ ;\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}\leq S_n\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+e^{\frac{2k}{n}}}$

0.5 | ب) استنتج أن: $\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_0^1\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$

التمرين 3 : (3.5 نقطة)

نعتبر العدد العقدي: $u=1+\left(2-\sqrt{3}\right)i$

0.5 | 1- أ) اكتب على الشكل الأسي الأعداد العقدية: $1-i$ و $1+\sqrt{3}i$

0.25 | ب) بين أن: $\frac{(1-i)\left(1+\sqrt{3}i\right)}{2\sqrt{2}}=e^{i\frac{\pi}{12}}$

ج) استنتج أن: $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$ 0.25

د) بين أن: $u=(\sqrt{6}-\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}$ 0.5

2- نعتبر المتتاليتين العدديتين $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين بما يلي:

$$x_0=1 \ ، \ y_0=0 \quad \text{و} \quad \begin{cases} x_{n+1}=x_n-\left(2-\sqrt{3}\right)y_n \\ y_{n+1}=\left(2-\sqrt{3}\right)x_n+y_n \end{cases} \quad ; \quad (\forall n\in\mathbb{N})$$

أ) بين بالترجع أن لكل $n\in\mathbb{N}$ ، $x_n+iy_n=u^n$ 0.5

ب) استنتج أن لكل $n\in\mathbb{N}$: $x_n=\dfrac{\cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n}$ و $y_n=\dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)^n}$ 0.5

3- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$

لكل عدد صحيح طبيعي n ، نشير بالرمز A_n إلى النقطة ذات اللحق u^n

أ) حدد الأعداد الصحيحة n التي تكون من أجلها النقط O و A_0 و A_n مستقيمية. 0.5

ب) بين أن لكل عدد صحيح n ، المثلث OA_nA_{n+1} قائم الزاوية في A_n 0.5

التمرين4: (3 نقط)

ليكن p **عددا أوليا فرديا**. نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة: $(E)\ :\ x^2\equiv 2\ [p]$

1- أ) بين أن: $2^{p-1}\equiv 1\ [p]$ 0.25

ب) استنتج أن: $2^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\ [p]$ أو $2^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1\ [p]$ 0.25

(نلاحظ أن: $(2^{\frac{p-1}{2}}-1)(2^{\frac{p-1}{2}}+1)=2^{p-1}-1$)

2- ليكن x حلا للمعادلة (E)

أ) بين أن p و x أوليان فيما بينهما. 0.5

ب) استنتج أن: $2^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\ [p]$ (يمكن استعمال مبرهنة فيرما Fermat) 0.5

3- بين أن لكل $k\in\{1,2,...,p-1\}$ ، p يقسم C_p^k 0.25

(نذكر أن لكل $k\in\{1,2,...,p-1\}$: $C_p^k=\dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ و $kC_p^k=pC_{p-1}^{k-1}$)

4- أ) باستعمال صيغة موافر (Moivre)، بين أن: 0.25

$$(1+i)^p=2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right)+i\,2^{\frac{p}{2}}\sin\left(p\frac{\pi}{4}\right)$$

(i هو العدد العقدي بحيث: $i^2=-1$)

ب) نقبل أن: $(1+i)^p = \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k} + i\sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k C_p^{2k+1}$

0.5 بين أن: $2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$ و $2^{\frac{p}{2}}\cos\left(p\frac{\pi}{4}\right) \equiv 1\ [p]$ (يمكن استعمال السؤال 3-)

0.5 5- استنتج أنه إذا كان $p \equiv 5\ [8]$ فإن المعادلة (E) لا تقبل حلا في $\mathbb{N}$

<u>التمرين 5</u>: (3.5 نقطة)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة غير تبادلية صفرها المصفوفة $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ و و حدتها المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ، و أن $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ فضاء متجهي حقيقي.

نعتبر المجموعة $E=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&y\\2y&x-y\end{pmatrix} / (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

الجزء I:

0.5 1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$

0.25 2- بين أن E فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$

0.25 3- أ) تحقق أن: $\forall(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4\ ;\ M(x,y)\times M(x',y')=M(xx'+3yy',xy'+yx')$

0.5 ب) استنتج أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية و واحدية.

0.25 4- أ) تحقق أن: $M(\sqrt{3},1)\times M(-\sqrt{3},1)=O$

0.25 ب) استنتج أن $(E,+,\times)$ ليس جسما.

الجزء II:

ليكن $F=\left\{x+y\sqrt{3} / (x,y)\in\mathbb{Q}^2\right\}$ و $G=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&y\\2y&x-y\end{pmatrix} / (x,y)\in\mathbb{Q}^2\right\}$

0.25 1- بين أن: $\forall(x,y)\in\mathbb{Q}^2\ ;\ x+y\sqrt{3}=0$ يكافئ $(x=0$ و $y=0)$

0.25 2- بين أن $F-\{0\}$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R}^*,\times)$

3- ليكن φ التطبيق المعرف من $F-\{0\}$ نحو E بما يلي:

$$\forall(x,y)\in\mathbb{Q}^2-\{(0,0)\}\ ;\ \varphi\left(x+y\sqrt{3}\right)=M(x,y)$$

0.25 أ) تحقق أن: $\varphi(F-\{0\})=G-\{O\}$

0.25 ب) بين أن φ تشاكل من $(F-\{0\},\times)$ نحو $(E,\times)$

0.25 ج) استنتج أن $(G-\{O\},\times)$ زمرة تبادلية.

0.25 4- بين أن $(G,+,\times)$ جسم تبادلي.

انتهى