الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2022

– الموضوع –

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

SSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SS | RS 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	مسلك العلوم الرياضية – أ و ب	المعامل	9

- مدة الاختبار هي أربع ساعات.
- يتضمن موضوع الاختبار أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن أن تنجز التمارين حسب الترتيب الذي يختاره المترشح.

- التمرين 1 يتعلق بالتحليل ..... (10 نقط)
- التمرين 2 يتعلق بالأعداد العقدية..... (3.5 نقط)
- التمرين 3 يتعلق بالبنيات الجبرية..... (3.5 نقط)
- التمرين 4 يتعلق بالحسابيات..... (3 نقط)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر

التمرين 1 : (10 نقط)

0.25 **A**-1- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}) \; ; \; 1+x\leq e^{x}$

0.25 2-أ) بين أن: $(\forall x\in\mathbb{R}^{+}) \; ; \; 0\leq 1-e^{-x}\leq x$

0.5 ب) استنتج أن: $(\forall x\in\mathbb{R}^{+}) \; ; \; 0\leq 1-x+\frac{x^{2}}{2}-e^{-x}\leq \frac{x^{3}}{6}$

0.5 ج) بين أن: $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\frac{1-x-e^{-x}}{x^{2}}=-\frac{1}{2}$

B. نعتبر الدالة f المعرفة على $I=[0,+\infty[$ بما يلي :

$$f(0)=1 \quad \text{و} \quad (\forall x\in]0,+\infty[) \; ; \; f(x)=\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$$

وليكن (C) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.5 1-أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0

0.25 ب) تحقق أن: $(\forall x\in]0,+\infty[) \; ; \; \frac{f(x)-1}{x}=\frac{1-2x-e^{-2x}}{x^{2}}-\frac{1-x-e^{-x}}{x^{2}}$

ج) استنتج أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 وأن العدد المشتق على اليمين في 0

0.5 هو $-\frac{3}{2}$

0.5 2-أ) بين أن: $(\forall x\in]0,+\infty[) \; ; \; f'(x)=\frac{e^{-2x}}{x^{2}}\left(2x+1-e^{x}(1+x)\right)$

0.5 ب) بين أن: $(\forall x\in]0,+\infty[) \; ; \; f'(x)\leq -e^{-2x}$

(يمكنك استعمال: $1+x\leq e^{x}$)

0.25 ج) استنتج منحى تغيرات f على I

3- **نقبل أن:** $(\forall x>0) \; ; \; f''(x)=\frac{e^{-2x}}{x^{3}}\left(-4x^{2}-4x-2+e^{x}(2+2x+x^{2})\right)$

0.25 أ) بين أن: $(\forall x\geq 0) \; ; \; 1+x+\frac{x^{2}}{2}\leq e^{x}$

0.5 ب) استنتج أن: $(\forall x>0) \; ; \; f''(x)>0$

4- **نقبل أن**: $\lim\limits_{x\to 0^{+}} f'(x)=-\frac{3}{2}$

0.5 أ) بين أن: $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x)=0$

0.5 ب) استنتج أن: $(\forall x\in I) \; ; \; |f'(x)|\leq\frac{3}{2}$

0.5 5-أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها .

0.25 ب) ضع جدول تغيرات f

0.25 ج) حدد الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة لنصف مماسه عند النقطة $T(0;1)$

0.5 د) مثل مبيانيا المنحنى (C) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

C-1- لكل x من $[0;1]$، نضع: $g(x)=f(x)-x$

0.5 أ) بين أن g تقابل من $[0;1]$ نحو مجال J يتم تحديده.

0.5 ب) بين أنه يوجد عدد حقيقي و حيد a من $]0;1[$ بحيث $f(a)=a$

2- لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n و لكل عدد صحيح k من $\{0;1;.....;n\}$ ، نعتبر الأعداد الحقيقية $x_k=\frac{ka}{n}$ و نضع:

$$J_k=\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)dt \quad \text{و} \quad I_k=\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt$$

0.5 أ) بين أن: $\forall k\in\{0;1;.....;n\}$; $|J_k-I_k|\le\frac{3}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(t-x_k)dt$

0.5 ب) استنتج أن: $\forall k\in\{0;1;.....;n\}$; $|J_k-I_k|\le\frac{3}{4}\left(\frac{a}{n}\right)^2$

3- نضع: $L=\int_0^a f(t)dt$

0.5 أ) بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $\left|\frac{a}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{ka}{n}\right)-L\right|\le\frac{3}{4}\frac{a^2}{n}$

0.25 ب) استنتج أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{ka}{n}\right)=\int_0^a f(t)dt$

التمرين2: (3.5 نقطة)

ليكن m من $\mathbb{C}\setminus\{-1;0;1\}$

I. نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (E_m) ذات المجهول z :

$$(E_m): \quad mz^2-(m-1)^2z-(m-1)^2=0$$

0.25 1- أ) بين أن مميز المعادلة (E_m) هو: $\Delta=(m^2-1)^2$

0.5 ب) حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E_m)

0.5 2- نضع و فقط في هذا السؤال $m=e^{i\theta}$ ، حيث: $0<\theta<\pi$
اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

II. المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر (O,u,v).

نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي $m-1$ و $1-\frac{1}{m}$

1- بين أن النقط O و A و B مستقيمية إذا و فقط إذا كان $m\in\mathbb{R}$ 0.5

2- نفترض أن m غير حقيقي.

لتكن C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و D صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$

و لتكن $P(p)$ و $Q(q)$ و $R(r)$ منتصفات القطع $[AC]$ و $[AD]$ و $[OB]$ بالتوالي.

أ) بين أن لحق النقطة C هو: $c=m-1+\left(\frac{1}{m}-m\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ 0.5

و أن لحق النقطة D هو: $d=(m-1)e^{i\frac{\pi}{3}}$

ب) بين أن: $2(p-r)=m-1+\left(\frac{1}{m}-m\right)\left(e^{i\frac{\pi}{3}}-1\right)$ 0.5

و $2(q-r)=(m-1)e^{i\frac{\pi}{3}}-\left(\frac{1}{m}-m\right)$

ج) بين أن: $q-r=e^{i\frac{\pi}{3}}(p-r)$ 0.25

د) ما هي طبيعة المثلث PQR ؟ (علل جوابك). 0.5

التمرين 3 : (3.5 نقط)

نذكر أن $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وغير تبادلية وغير كاملة وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(القانون $\times$ هو الضرب الاعتيادي للمصفوفات)

لكل عدد حقيقي a نضع: $M(a)=\begin{pmatrix}1&0&0\\a+1&3&-1\\2a+3&6&-2\end{pmatrix}$

ولتكن $G=\{M(a)/\ a\in\mathbb{R}\}$

1- ليكن التطبيق j من $\mathbb{R}$ نحو $M_3(\mathbb{R})$ المعرف بما يلي: $j(a)=M(a)$; $(\forall a\in\mathbb{R})$

أ) بين أن j تشاكل من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(M_3(\mathbb{R}),\times)$ 0.5

0.5 ب) بين أن $G = (\mathbb{R}\setminus\{-1\})$ ، ثم استنتج أن $(G,*)$ زمرة تبادلية.

0.5 ج) حدد J العنصر المحايد في $(G,*)$

0.5 د) حدد مقلوب $M(a)$ في $(G,*)$

0.5 ه) حل في $(G,*)$ المعادلة: $M(1)*X = M(2)$

0.25 2-أ) بين أن: $M(a)*J = M(a)*I \quad ; \quad (\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{-1\})$

0.5 ب) استنتج أن لكل a من $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ، $M(a)$ لا تقبل مقلوبا في $(M_3(\mathbb{R}),*)$

0.25 ج) تحقق أن المصفوفات على شكل $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & 3 & 0 \\ 3x+5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ بحيث $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ، حلول في $(M_3(\mathbb{R}),*)$ للمعادلة: $M(1)*X = M(2)$

التمرين 4: (3 نقط)

0.5 1- بين أن العدد 137 أولي

0.5 2- حدد زوج (u,v) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث: $38u + 136v = 2$

3- ليكن x من $\mathbb{Z}$ بحيث: $x^{38} \equiv 1 \ [137]$

0.5 أ) بين أن x و 137 أوليان فيما بينهما,

0.5 ب) بين أن: $x^{136} \equiv 1 \ [137]$

0.5 ج) بين أن: $x^2 \equiv 1 \ [137]$

0.5 4- حل في المجموعة $\mathbb{Z}$ المعادلة $(E): \quad x^{19} \equiv 1 \ [137]$

انتهى