

تصحيح التمرين الأول

1- لنبين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{R}), +)$

$$O = M(0,0) \in E \quad \text{لأن } E \neq \emptyset \quad \checkmark$$

$$E \subset M_3(\mathbb{R}) \quad \checkmark$$

✓ ليكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ من E : $M(a,b) - M(c,d) \in E$ ؟

$$M(a,b) - M(c,d) = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix} \quad \text{لدينا :}$$

$$M(a,b) - M(c,d) = \begin{pmatrix} a-c & b-d & -b+d \\ 0 & 0 & 0 \\ b-d & -a+c & a-c \end{pmatrix} \quad \text{إذن :}$$

$$M(a,b) - M(c,d) = \begin{pmatrix} a-c & b-d & -(b-d) \\ 0 & 0 & 0 \\ b-d & -(a-c) & a-c \end{pmatrix} \quad \text{إذن :}$$

و منه: $M(a,b) - M(c,d) = M(a-c, b-d) \in E$ ($(a-c, b-d) \in \mathbb{R}^2$)

و بالتالي: E زمرة جزئية للزمرة $(M_3(\mathbb{R}), +)$

2- لنبين أن E جزء مستقر من $(M_3(\mathbb{R}), T)$

$$E \subset M_3(\mathbb{R}) \quad \text{لدينا :} \quad \checkmark$$

✓ ليكن $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ و $M(a,b)$ و $M(c,d)$ من E

؟ $M(a,b)TM(c,d) \in E$

$$M(a,b)TM(c,d) = M(a,b) \times A \times M(c,d) \quad \text{لدينا :}$$

$$M(a,b)TM(c,d) = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix} \quad \text{إذن :}$$

$$M(a,b)TM(c,d) = \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix} \quad \text{إذن :}$$

$$M(a,b)TM(c,d) = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc & -(ad+bc) \\ 0 & 0 & 0 \\ ad+bc & -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix} \text{ : إذن}$$

و منه : $M(a,b)TM(c,d) = M(ac-bd, ad+bc) \in E$ $(ac-bd, ad+bc) \in \mathbb{R}^2$
 إذن $M(a,b)TM(c,d) \in E$ $(\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4)$
 و بالتالي : E جزء مستقر من $(M_3(\mathbb{R}), T)$

3- أ)

✓ لنبين أن φ تشاكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (E, T)

ليكن $a+ib$ و $c+id$ من \mathbb{C}^* بحيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ و $(c,d) \in \mathbb{R}^2$

$$? \varphi((a+ib) \times (c+id)) = \varphi(a+ib) T \varphi(c+id)$$

$$\varphi((a+ib) \times (c+id)) = \varphi((ac-bd) + i(ad+bc))$$

$$= M(ac-bd, ad+bc)$$

$$= M(a,b)TM(c,d)$$

$$= \varphi(a+ib) T \varphi(c+id)$$

إذن φ تشاكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (E, T)

✓ لنبين أن $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

• لدينا حسب إنشاء المجموعة E :

لكل $M \in E^*$ يوجد (a,b) من $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ بحيث $M = M(a,b)$

إذن يوجد $z = a+ib$ من \mathbb{C}^* بحيث $M = \varphi(a+ib)$

$$\boxed{E^* \subset \varphi(\mathbb{C}^*)} \text{ : و منه}$$

• حسب إنشاء التطبيق φ لدينا : $\varphi(\mathbb{C}^*) \subset E$

$$\varphi(a+ib) = O \Leftrightarrow M(a,b) = M(0,0)$$

$$\Leftrightarrow a = b = 0$$

إذن : لكل z من \mathbb{C}^* : $\varphi(z) \neq O$

$$\boxed{\varphi(\mathbb{C}^*) \subset E^*} \text{ : و منه}$$

(ب)

✓ نعلم أن (\mathbb{C}^*, \times) زمرة تبادلية $(\mathbb{C}, +, \times)$ جسم تبادلي (

ولدينا φ تشاكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (E, T)

إذن $(\varphi(\mathbb{C}^*), T)$ هو زمرة تبادلية

و بما أن $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$ فإن (E^*, T) زمرة تبادلية

✓ نعلم أن 1 هو العنصر المحايد ل (\mathbb{C}^*, \times)

إذن $J = \varphi(1)$ هو العنصر المحايد ل $(\varphi(\mathbb{C}^*), T)$ أي ل (E^*, T)

$$J = \varphi(1) = \varphi((1) + i(0)) = M(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4- أ) لنبين أن قانون التركيب الداخلي "T" توزيعي بالنسبة لقانون التركيب الداخلي "+" في E

ليكن (a, b) و (c, d) و (e, f) من \mathbb{R}^2

$$M(a, b)T(M(c, d) + M(e, f)) = (M(a, b)TM(c, d)) + (M(a, b)TM(e, f))$$

$$\begin{aligned} M(a, b)T(M(c, d) + M(e, f)) &= M(a, b)TM(c + e, d + f) \\ &= M(a(c + e) - b(d + f); a(d + f) + b(c + e)) \\ &= M(ac + ae - bd - bf; ad + af + bc + be) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (M(a, b)TM(c, d)) + (M(a, b)TM(e, f)) &= M(ac - bd, ad + bc) + M(ae - bf, af + be) \\ &= M(ac - bd + ae - bf; ad + bc + af + be) \end{aligned}$$

إذن لكل (a, b) و (c, d) و (e, f) من \mathbb{R}^2 :

$$M(a, b)T(M(c, d) + M(e, f)) = (M(a, b)TM(c, d)) + (M(a, b)TM(e, f))$$

(ب)

✓ لدينا $(E, +)$ زمرة تبادلية

✓ ولدينا (E^*, T) زمرة تبادلية

✓ و "T" توزيعي بالنسبة ل "+" في E

و منه $(E, +, T)$ جسم تبادلي

تصحيح التمرين الثاني

الجزء الأول :

-1

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2(m+1+i))^2 - 4(2)(m^2 + (1+i)m + i) \\ &= 4(m+1+i)^2 - 8(m^2 + (1+i)m + i) \\ &= 4(m^2 + 2(1+i)m + (1+i)^2) - 8(m^2 + (1+i)m + i) \\ &= 4(m^2 + 2(1+i)m + 2i) - 8(m^2 + (1+i)m + i) \\ &= -4m^2 \\ &= (2im)^2\end{aligned}$$

-2 لنحل في \mathbb{C} المعادلة (E)

$$\Delta = (2im)^2 \text{ لدينا}$$

$$z = \frac{2(m+1+i) - 2im}{2(2)} \text{ أو } z = \frac{2(m+1+i) + 2im}{2(2)} \text{ إذن}$$

$$z = \frac{m+1+i - im}{2} \text{ أو } z = \frac{m+1+i + im}{2} \text{ إذن}$$

$$z = \frac{(m+i) - i(m+i)}{2} \text{ أو } z = \frac{(m+1) + i(m+1)}{2} \text{ إذن}$$

$$z = (m+i)\left(\frac{1-i}{2}\right) \text{ أو } z = (m+1)\left(\frac{1+i}{2}\right) \text{ إذن}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{1-i}{2}\right)(m+i), \left(\frac{1+i}{2}\right)(m+1) \right\} \text{ و منه}$$

الجزء الثاني :

(أ-1)

$$\begin{aligned} iz_2 + 1 &= i \left(\frac{1-i}{2} (m+i) \right) + 1 \\ &= \frac{1+i}{2} (m+i) + 1 \\ &= \frac{1+i}{2} \left[m+i + \frac{1}{1+i} \right] \\ &= \frac{1+i}{2} [m+i+1-i] \\ &= \frac{1+i}{2} (m+1) \\ &= z_1 \end{aligned}$$

(ب) لدينا :

$$\begin{aligned} z_1 - \omega &= iz_2 + 1 - \omega \\ &= iz_2 + 1 - \frac{1+i}{2} \\ &= iz_2 + \frac{1-i}{2} \\ &= i \left(z_2 - \frac{1+i}{2} \right) \\ &= i (z_2 - \omega) \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}} (z_2 - \omega) \end{aligned}$$

إذن : M_1 هي صورة M_2 بالدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللوح $\omega = \frac{1+i}{2}$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{z_2 - \omega}{z_1 - \omega} &= \frac{\left(\frac{1-i}{2}\right)(m+i) - m}{\left(\frac{1+i}{2}\right)(m+1) - m} \\ &= \frac{(1-i)(m+i) - 2m}{(1+i)(m+1) - 2m} \\ &= \frac{m+i - im + 1 - 2m}{m+1 + im + i - 2m} \\ &= \frac{1-m+i(1-m)}{1-m+im+i} \\ &= \frac{i(m-1)(i-1)}{(m-i)(i-1)} \\ &= \frac{i(m-1)}{m-i}\end{aligned}$$

ب) نفترض أن M و M_1 و M_2 مستقيمة

$$\frac{z_2 - m}{z_1 - m} \in \mathbb{R} \quad \text{إذن}$$

$$i \frac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{m-1}{m-i} \in i\mathbb{R} \quad \text{إذن}$$

$$\arg\left(\frac{m-1}{m-i}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{إذن}$$

$$\left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{إذن}$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \quad \text{إذن}$$

و منه : M تنتمي إلى الدائرة (Γ) التي أحد أقطارها $[AB]$

ج) نفترض أن Ω و M و M_1 و M_2 متداورة

$$\frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} \times \frac{z_2 - m}{z_1 - m} \in \mathbb{R} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} = i \quad \text{و} \quad \frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i \frac{m-1}{m-i} \quad \text{لدينا}$$

$$\text{إذن : } i \times i \frac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R}$$

$$\text{إذن : } -\frac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R}$$

$$\text{إذن : } \frac{m-1}{m-i} \in \mathbb{R}$$

إذن : M و A و B مستقيمة

إذن $M \in (AB)$ بحيث : $M \neq A$ و $M \neq B$

(عكسيا نبين أن إذا كان $M \in (AB)$ بحيث : $M \neq A$ و $M \neq B$ فإن Ω و M و M_1 و M_2 متداورة)

و بالتالي مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة هي المستقيم (AB) محروما من النقطتين A و B

تصحيح التمرين الثالث

1- أ) ليكن p عددا أوليا أكبر من أو يساوي 5

نفترض أن $p \geq 2017$

لدينا الزوج (x, y) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ إذن : $x \geq 1$ و $y \geq 1$

إذن $px \geq 2017$ و $y^{p-1} \geq 1$

إذن $px + y^{p-1} \geq 2018$

إذن $2017 \geq 2018$ و هذا غير ممكن

ومنه : $p < 2017$

ب) نفترض أن p يقسم y

إذن p يقسم y^{p-1}

إذن $y^{p-1} = kp$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

و لدينا : $px + y^{p-1} = 2017$

إذن $px + kp = 2017$

إذن $p(x + k) = 2017$

إذن p يقسم 2017

و بما أن p عدد أولي أكبر من أو يساوي 5 فإن $p = 2017$

و هذا تناقض مع كون $p < 2017$

ومنه p لا يقسم y

(ج)

- ✓ لدينا p عدد أولي و p لا يقسم y
إذن حسب ميرهنه فيرما : $y^{p-1} \equiv 1[p]$
✓ لدينا : $px \equiv 0[p]$ و $y^{p-1} \equiv 1[p]$
إذن $px + y^{p-1} \equiv 1[p]$
إذن $2017 \equiv 1[p]$
إذن $2016 \equiv 0[p]$
و منه p يقسم 2016

- (د) لدينا p يقسم 2016
إذن p يقسم $2^5 \times 3 \times 7$
إذن $p = 2$ أو $p = 3$ أو $p = 7$ (p عدد أولي)
و بما أن $p \geq 5$

-2

- ✓ إذا اكن $p \neq 7$: فحسب السؤال (-1) المعادلة لا تقبل حلا
✓ إذا كان $p = 7$:

$$7x + y^6 = 2017 \text{ : المعادلة تصبح}$$

$$\text{بما أن } x \geq 1 \text{ فإن } y^6 < 2017$$

$$\text{إذن } y < 4$$

$$\text{إذن } (y \in \mathbb{N}^*) \quad y \in \{1, 2, 3\}$$

• إذا كان $y = 3$: المعادلة تصبح : $7x + 3^6 = 2017$

$$\text{إذن } 7x = 1288$$

$$\text{إذن } x = 184$$

• إذا كان $y = 2$: المعادلة تصبح : $7x + 2^6 = 2017$

$$\text{إذن } 7x = 1953$$

$$\text{إذن } x = 279$$

• إذا كان $y = 1$: المعادلة تصبح : $7x + 1 = 2017$

$$\text{إذن } 7x = 2016$$

$$\text{إذن } x = 288$$

و بالتالي : $(x, y) \in \{(184, 3); (279, 2); (288, 1)\}$

تصحيح التمرين الرابع

الجزء الأول :

1- أ) لنبين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0

✓ لدينا : $f(0) = 0$

✓

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} (1-t) e^t$$

$$\left(\begin{array}{l} t = \frac{-1}{x} \\ x \rightarrow 0^+ \\ t \rightarrow -\infty \end{array} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t - t e^t$$

$$= 0$$

بما أن $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0)$ فإن الدالة f متصلة على اليمين في 0

ب) لنبين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\left(\begin{array}{l} t = \frac{-1}{x} \\ x \rightarrow 0^+ \\ t \rightarrow -\infty \end{array} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} (-t + t^2) e^t$$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} -t e^t + t^2 e^t = 0$$

إذن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و لدينا : $f'_d(0) = 0$

(ج)

✓

$$]0, +\infty[\text{ قابلة للاشتقاق على } f_1 : x \mapsto 1 + \frac{1}{x} \bullet$$

$$]0, +\infty[\text{ قابلة للاشتقاق على } f_2 : x \mapsto -\frac{1}{x} \bullet$$

$$\mathbb{R} \text{ قابلة للاشتقاق على } f_2 : x \mapsto e^x$$

$$f_2(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$$

$$\text{إذن }]0, +\infty[\text{ قابلة للاشتقاق على } f_4 = f_3 \circ f_2 : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\text{و بالتالي الدالة } f = f_1 \times f_4 \text{ قابلة للاشتقاق على }]0, +\infty[$$

✓ ليكن $x \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}} \right)' \\ &= \left(1 + \frac{1}{x} \right)' e^{-\frac{1}{x}} + \left(1 + \frac{1}{x} \right) \left(e^{-\frac{1}{x}} \right)' \\ &= -\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} + \left(1 + \frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x} \right)' e^{-\frac{1}{x}} \\ &= -\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} + \left(1 + \frac{1}{x} \right) \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \left(-1 + 1 + \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

$$\text{إذن } (\forall x \in]0, +\infty[) f'(x) = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}} = 1 \quad \text{لدينا : (أ-2)}$$

$$\left(\begin{array}{l} t = -\frac{1}{x} \\ x \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} e^t = 1 \end{array} \right. \text{ لأن :}$$

التأويل الهندسي : (C) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y = 1$ بجوار $+\infty$

(ب) جدول تغيرات f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	0	↗ 1

3- (أ) لدينا $(\forall x \in]0, +\infty[) f'(x) = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$

الدالة f' قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

ليكن $x \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} \right)' \\ &= \left(\frac{1}{x^3} \right)' e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3} \left(e^{-\frac{1}{x}} \right)' \\ &= \frac{-(x^3)'}{(x^3)^2} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3} \left(-\frac{1}{x} \right)' e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{-3x^2}{x^6} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3} \times \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{-3}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^5} e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x^5} e^{-\frac{1}{x}} (-3x + 1) \end{aligned}$$

لدينا : $\frac{1}{x^5} e^{-\frac{1}{x}} > 0$ إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $-3x + 1$

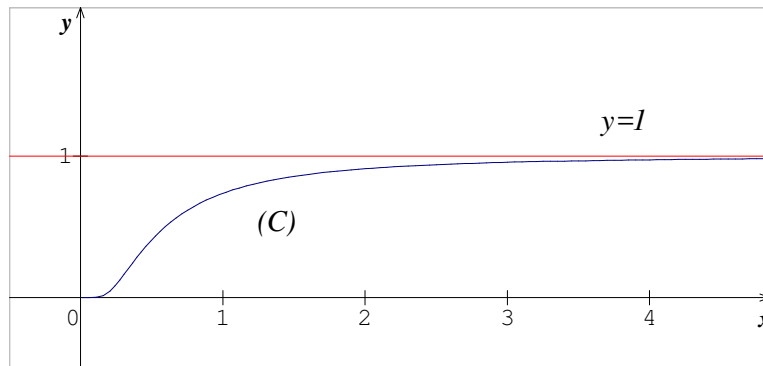
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) > 0 : \left] 0, \frac{1}{3} \right[\text{ على المجال}$$

$$f''(x) < 0 : \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[\text{ على المجال}$$

بما أن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند $\frac{1}{3}$ فإن النقطة $I\left(\frac{1}{3}, 4e^{-3}\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C)

(ج)



الجزء الثاني:

-1 ليكن $x \in [0, +\infty[$

لدينا f متصلة على $[0, +\infty[$ ($1 \in [0, +\infty[$ و $x \in [0, +\infty[$)

$x \mapsto x$ و $x \mapsto 1$ قابلتين للاشتقاق على $[0, +\infty[$

إذن F متصلة على $[0, +\infty[$

ملاحظة: $(F : x \mapsto \int_x^1 f(t) dt = -\int_1^x f(t) dt)$

-2 (أ) ليكن $x \in]0, +\infty[$

$$\begin{cases} u(t) = e^{-\frac{1}{t}} \\ v'(t) = 1 \end{cases} \quad \swarrow \quad \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \\ v(t) = t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_x^1 e^{-\frac{1}{t}} dt &= \left[t e^{-\frac{1}{t}} \right]_x^1 - \int_x^1 \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt \\ &= e^{-1} - x e^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt \end{aligned}$$

$$(\forall x \in]0, +\infty[) \int_x^1 e^{-\frac{1}{t}} dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt$$

(ب) ليكن $x \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} \int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}} dt &= \int_x^1 e^{-\frac{1}{t}} dt + \int_x^1 \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt \\ &= e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt + \int_x^1 \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt \\ &= e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

$$(\forall x \in]0, +\infty[) \int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}} dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}}$$

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}} dt = F(0)$$

و بما أن F متصلة على اليمين في 0 فإن $F(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x)$

$$F(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-1} + \frac{1}{t} e^{-t} = e^{-1}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = e^{-1} \text{ : ومنه}$$

3- مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) والمستقيمت ذات المعادلات $x=0$ و $x=2$ و $y=0$:

$$A = \int_0^2 |f(t)| dt \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

$$(\forall x \in [0, 2]) f(x) \geq 0 \text{ : لدينا}$$

$$A = \int_0^2 f(t) dt \times 2cm \times 2cm \text{ : إذن}$$

$$A = \left(\int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt \right) \times 4cm^2 \text{ : إذن}$$

$$A = \left(e^{-1} - \int_2^1 f(t) dt \right) \times 4cm^2 \text{ : إذن}$$

$$A = \left(e^{-1} - \left(e^{-1} - 2e^{-\frac{1}{2}} \right) \right) \times 4cm^2 \text{ : إذن}$$

$$A = 8e^{-\frac{1}{2}} cm^2 \text{ : ومنه}$$

4- أ) ليكن $n \in \mathbb{N}$:

✓ F متصلة على المجال $[n, n+2]$

✓ F قابلة للاشتقاق على المجال $]n, n+2[$

إذن حسب ميرهنه القيم الوسيطة : يوجد v_n من المجال $]n, n+2[$ بحيث :

$$F(n) - F(n+2) = F'(v_n) \cdot (n - n - 2)$$

$$F(n) - F(n+2) = -2F'(v_n) \quad \text{إذن :}$$

$$(F'(x) = \left(\int_x^1 f(t) dt \right)' = - \left(\int_1^x f(t) dt \right)' = -f(x) = - \left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}})$$

$$u_n = 2 \left(1 + \frac{1}{v_n} \right) e^{\frac{1}{v_n}} \quad \text{بحيث :} \quad]n, n+2[\text{ من المجال } v_n \text{ حقيقي يوجد عدد طبيعي } n \text{ يوجد عدد حقيقي } v_n \text{ من المجال }]n, n+2[\text{ بحيث :}$$

ب) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$:

لدينا : $n \leq v_n \leq n+2$ و الدالة f تزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$

$$\text{إذن :} \quad f(n) \leq f(v_n) \leq f(n+2)$$

$$\text{إذن :} \quad \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{-\frac{1}{n}} \leq \left(1 + \frac{1}{v_n} \right) e^{-\frac{1}{v_n}} \leq \left(1 + \frac{1}{n+2} \right) e^{-\frac{1}{n+2}}$$

$$\text{و منه :} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq 2 \left(1 + \frac{1}{n+2} \right) e^{-\frac{1}{n+2}}$$

$$\text{ج) لدينا :} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq 2 \left(1 + \frac{1}{n+2} \right) e^{-\frac{1}{n+2}}$$

$$\text{و لدينا :} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(1 + \frac{1}{n+2} \right) e^{-\frac{1}{n+2}} = 2 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{-\frac{1}{n}} = 2$$

$$\text{إذن حسب ميرهنه الدرك :} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

الجزء الثالث :

1- أ) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$:

لنبين أن المعادلة $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ تقبل حلاً وحيداً a_n في المجال $]0, +\infty[$

✓ لدينا f متصلة على $]0, +\infty[$

✓ ولدينا f تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$

✓ $e^{-\frac{1}{n}} \in f(]0, +\infty[) =]0, 1[$

و منه لكل n من \mathbb{N}^* المعادلة $f(x) = e^{-\frac{1}{n}}$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0, +\infty[$
و بالتالي : لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n يوجد عدد حقيقي موجب قطعاً وحيد a_n بحيث : $f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}}$
(ب) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(a_{n+1}) = e^{-\frac{1}{n+1}} \text{ و } f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}} \text{ لدينا :}$$

$$\text{و } f(a_{n+1}) - f(a_n) = e^{-\frac{1}{n+1}} - e^{-\frac{1}{n}} = e^{-\frac{1}{n}} \left(e^{-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}} - 1 \right) = e^{-\frac{1}{n}} \left(e^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1 \right) > 0$$

إذن : $f(a_{n+1}) > f(a_n)$

و بما أن f تقابل تزايدية فإن f^{-1} أيضاً تقابل تزايدية
إذن $f^{-1}(f(a_{n+1})) > f^{-1}(f(a_n))$
و منه لكل n من \mathbb{N}^* : $a_{n+1} > a_n$
و بالتالي : $(a_n)_{n \geq 1}$ تزايدية
(ج) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$:
لدينا :

$$f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \ln(f(a_n)) = -\frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \times e^{\frac{-1}{a_n}}\right) = -\frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) + \ln\left(e^{\frac{-1}{a_n}}\right) = -\frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) - \frac{1}{a_n} = -\frac{1}{n}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad -\frac{1}{a_n} + \ln\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = -\frac{1}{n}$$

(2-أ) ليكن $t \in [0, +\infty[$

$$1 - t - \frac{1}{1+t} = \frac{-t^2}{1+t} \leq 0 \text{ لدينا :}$$

$$\boxed{1 - t \leq \frac{1}{1+t}} \text{ إذن :}$$

$$\frac{1}{1+t} - (1-t+t^2) = \frac{1-1+t-t^2-t+t^2-t^3}{1+t} = \frac{-t^3}{1+t} \leq 0 \text{ ولدينا :}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2} \text{ : إذن}$$

$$(\forall t \in [0, +\infty[) \quad 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2 \text{ : وبالتالي}$$

(ب) ليكن $x \in [0, +\infty[$:

$$(\forall t \in [0, +\infty[) \quad 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2 \text{ : لدينا}$$

$$\int_0^x (1-t) dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x (1-t+t^2) dt \text{ : إذن}$$

$$\left[t - \frac{t^2}{2} \right] \leq [\ln(1+t)]_0^x \leq \left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right]_0^x \text{ : إذن}$$

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \text{ : إذن}$$

$$(\forall x \in [0, +\infty[) \quad -\frac{x^2}{2} \leq -x + \ln(1+x) \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \text{ : وبالتالي}$$

(أ-3)

$$f(a_4) = e^{-\frac{1}{4}} \text{ و } f(1) = 2e^{-\frac{1}{2}} \text{ : لدينا } \checkmark$$

$$f(a_4) - f(1) = e^{-\frac{1}{4}} - 2e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} \left(e^{\frac{3}{4}} - 2 \right) \geq 0 \text{ و}$$

$$f(a_4) \geq f(1) \text{ : إذن}$$

و بما أن f تقابل تزايدية فإن f^{-1} أيضا تقابل تزايدية

$$f^{-1}(f(a_4)) \geq f^{-1}(f(1)) \text{ : إذن}$$

$$a_4 \geq 1 \text{ : ومنه}$$

✓

• من أجل $n = 4$:

$$a_4 \geq 1 \text{ : لدينا}$$

• ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 4

$$\blacksquare \text{ نفترض أن } a_n \geq 1$$

$$\blacksquare \text{ و نبين أن } a_{n+1} \geq 1$$

لدينا: $(a_n)_{n \geq 1}$ تزايدية إذن $a_{n+1} \geq a_n$ (1)

و حسب الافتراض لدينا: $a_n \geq 1$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $a_{n+1} \geq 1$

• نستنتج أن لكل n من $\mathbb{N}^* \setminus \{1, 2, 3\}$: $a_n \geq 1$

(ب) لدينا حسب نتيجة السؤال 2-ب) من الجزء الثالث: $(\forall x \in [0, +\infty[) -\frac{x^2}{2} \leq -x + \ln(1+x) \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

نأخذ $x = \frac{1}{a_n}$

إذن: $-\frac{1}{2a_n^2} \leq -\frac{1}{a_n} + \ln\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \leq -\frac{1}{2a_n^2} + \frac{1}{3a_n^3}$

و لدينا حسب نتيجة السؤال 1-ج) من الجزء الثالث: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) -\frac{1}{a_n} + \ln\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = -\frac{1}{n}$

إذن: $-\frac{1}{2a_n^2} \leq -\frac{1}{n} \leq -\frac{1}{2a_n^2} + \frac{1}{3a_n^3}$

إذن: $-\frac{1}{2} \leq -\frac{a_n^2}{n} \leq -\frac{1}{2} + \frac{1}{3a_n}$

إذن: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3a_n} \leq \frac{a_n^2}{n} \leq \frac{1}{2}$

و منه: $1 - \frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^2}{n} \leq 1$

(ج)

✓ لدينا: $a_n \geq 1$

إذن $3a_n \geq 3$

إذن: $\frac{2}{3a_n} \leq \frac{2}{3}$

إذن: $-\frac{2}{3a_n} \geq -\frac{2}{3}$

إذن: $\frac{1}{3} \leq 1 - \frac{2}{3a_n}$

$$1 - \frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^2}{n} \text{ و بما أن}$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{2a_n^2}{n} \text{ : فإن}$$

$$\frac{n}{6} \leq a_n^2 \text{ : إذن}$$

$$\sqrt{\frac{n}{6}} \leq a_n \text{ : ومنه}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \text{ : إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{6}} = +\infty \text{ و } \sqrt{\frac{n}{6}} \leq a_n \text{ : لدينا } \checkmark$$

$$1 - \frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^2}{n} \leq 1 \text{ : لدينا (د)}$$

$$\left(1 - \frac{2}{3a_n} \geq 0 \right) \quad \boxed{\sqrt{1 - \frac{2}{3a_n}} \leq a_n \sqrt{\frac{2}{n}} \leq 1} \text{ : إذن}$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{3a_n}} = \sqrt{1} = 1} \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \text{ بما أن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{n}} = 1 \text{ : و التالي حسب مبرهنة الدرك}$$

تتبع