

**التمرين الاول**

$$n \in \mathbb{N}^*; a_n = \underbrace{333\dots31}_{n \times}$$

(1) نتحقق من أن  $a_1$  و  $a_2$  أوليان

لدينا  $a_1 = 31$  و  $a_2 = 331$  عدد أولي

لدينا  $a_2 = 331$  و  $331$  لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية التي مربعها أصغر منه أي (2 - 3 - 5 - 7 - 11 - 13 و 17)

إذن  $331$  عدد أولي

$$a_1 \text{ و } a_2 \text{ عددان أوليان}$$

(2) لنبين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 3a_n + 7 = 10^{n+1}$

$$\text{لدينا: } (\forall n \in \mathbb{N}^*); a_n = 1 + 3 \times 10 + 3 \times 10^2 + \dots + 3 \times 10^n = 1 + 3(10 + 10^2 + \dots + 10^n)$$

$$\text{و } (\forall n \in \mathbb{N}^*); 10 + 10^2 + \dots + 10^n = 10 \times \frac{1 - 10^n}{1 - 10} = \frac{10^{n+1} - 10}{9}$$

$$\text{و منه } (\forall n \in \mathbb{N}^*); 3a_n + 7 = 10^{n+1}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); 3a_n + 7 = 10^{n+1}$$

(3) لنبين أن  $(\forall k \in \mathbb{N}); 10^{30k+2} \equiv 7[31]$

لدينا حسب (2)  $10^2 - 7 = 3 \times 31$  إذن  $10^2 \equiv 7[31]$

و لدينا  $10^{30k} \equiv 1[31] \Rightarrow 10^{30k+2} \equiv 7[31]$

$$\begin{cases} 10^2 \equiv 7[31] \\ 10^{30k} \equiv 1[31] \end{cases} \Rightarrow 10^{30k+2} \equiv 7[31] \text{ وأخيرا}$$

$$(\forall k \in \mathbb{N}); 10^{30k+2} \equiv 7[31]$$

(4) لنبين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}); 3a_{30k+1} \equiv 0[31]$  ثم لنستنتج أن  $31$  يقسم  $a_{30k+1}$

لكل  $k$  من  $\mathbb{N}$ ,  $30k+1 \in \mathbb{N}^*$  (إذن حسب (2)  $3a_{30k+1} + 7 = 10^{30k+2}$  و حسب (3)  $10^{30k+2} \equiv 7[31]$ )

$$\text{إذن } 3a_{30k+1} + 7 \equiv 7[31] \text{ و منه } 3a_{30k+1} \equiv 0[31]$$

و بما أن  $31$  يقسم  $3a_{30k+1}$  و  $31 \wedge 3 = 1$  فإن حسب مبرهنة كوكس  $31$  يقسم  $a_{30k+1}$

$$(\forall n \in \mathbb{N}); 3a_{30k+1} \equiv 0[31] \text{ } 31 \text{ يقسم } a_{30k+1}$$

(5) لنبين أن المعادلة  $a_n x + 31y = 1$  لا تقبل حلول في  $\mathbb{Z}^2$

لدينا  $(n \in \mathbb{N}^*); n \equiv 1[30] \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*; n = 30k + 1$

و منه حسب السؤال (4)  $31$  يقسم  $a_n$  أي أن  $a_n \wedge 31 = 31$  و هذا يعني ان المعادلة  $a_n x + 31y = 1$  لا تقبل حلول في  $\mathbb{Z}^2$

(الشرط اللازم لكي تقبل هذه المعادلة حلول في  $\mathbb{Z}^2$  هو  $a_n \wedge 31 = 1$ )

$$\text{المعادلة } a_n x + 31y = 1 \text{ لا تقبل حلول في } \mathbb{Z}^2$$

**التمرين الثاني**

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2; M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} \text{ و } E = \{M(a,b) / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

(1) لنبين أن  $E$  زمرة جزئية للزمرة  $(M_2(\mathbb{R}), +)$

$$\bullet I = M(1,0) \in E \Rightarrow E \neq \emptyset$$

$$\bullet (\forall (M(a,b), M(c,d)) \in E^2); M(a,b) - M(c,d) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-c & a-b-c+d \\ b-d & a+b-c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & (a-c)-(b-d) \\ b-d & (a-c)+(b-d) \end{pmatrix} = M(a-c, b-d) \in E$$

و منه حسب الخاصية المميزة للزمرة الجزئية نستنتج أن :

$$\boxed{E \text{ زمرة جزئية للزمرة } (M_2(\mathbb{R}), +)}$$

(2) لدينا  $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  و  $1+0 \neq 2$  إذن  $J = M(1,0) \in E$  و  $J^2 \notin E$  نستنتج أن :

$$\boxed{E \text{ جزء غير مستقر من } (M_2(\mathbb{R}), \times)}$$

(3) أ) لنبين أن  $\varphi$  تشاكل من  $(\mathbb{C}^*, \times)$  نحو  $(M_2(\mathbb{R}), *)$

لدينا

$$\left( \forall ((a,b), (c,d)) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})^2 \right); \varphi((a+bi) \times (c+di)) = \varphi(ac-bd + i(ad+bc)) = M(ac-bd, ad+bc)$$

و لدينا

$$\varphi(a+bi) * \varphi(c+di) = M(a,b) * M(c,d) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & c-d \\ d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ac-ad-bc-bd \\ ad+bc & bc-bd+ac+ad \end{pmatrix} = M(ac-bd, ad+bc)$$

$$\left( \forall ((a,b), (c,d)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \right); \varphi((a+bi) \times (c+di)) = \varphi(a+bi) * \varphi(c+di)$$

و منه

$$\boxed{\varphi \text{ تشاكل من } (\mathbb{C}^*, \times) \text{ نحو } (M_2(\mathbb{R}), *)}$$

ب) لنبين أن  $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$  حيث  $E^* = E \setminus \{O\}$

$$\text{لدينا: } M(a,b) \in E^* \Leftrightarrow (a,b) \neq (0,0) \Leftrightarrow a+bi \in \mathbb{C}^* \Leftrightarrow \varphi(a+bi) \in \varphi(\mathbb{C}^*) \Leftrightarrow M(a,b) \in \varphi(\mathbb{C}^*)$$

$$\text{إذن } M(a,b) \in E^* \Leftrightarrow M(a,b) \in \varphi(\mathbb{C}^*) \text{ و منه:}$$

$$\boxed{\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*}$$

ج) لنبين أن  $(E^*, *)$  زمرة تبادلية

$$\text{لدينا } (\mathbb{C}^*, \times) \text{ زمرة تبادلية و } \varphi \text{ تشاكل من } (\mathbb{C}^*, \times) \text{ نحو } (M_2(\mathbb{R}), *) \text{ إذن } (\varphi(\mathbb{C}^*), *) \text{ زمرة تبادلية و لدينا } \varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$$

نستنتج أن

$$(E^*, *) \text{ زمرة تبادلية}$$

$$(4) \text{ لدينا } (\forall (A, B, C) \in E^3), A * (B + C) = A \times N \times (B + C) = A \times N \times B + A \times N \times C = A * B + A * C$$

إذن

$$(\forall (A, B, C) \in E^3), A * (B + C) = A * B + A * C$$

(5) نستنتج مما سبق أن  $(E, +, *)$  جسم تبادلي.

لدينا حسب (1) زمرة وحدتها  $O$  ولدينا حسب (3) ج  $(E^*, *)$  زمرة تبادلية كما لدينا حسب (4) القانون \* توزيعي على القانون + نستنتج أن

$$(E, +, *) \text{ جسم تبادلي}$$

**التمرين الثالث**

$$(1) \text{ أ) لنتحقق من أن مميز المعادلة } (E) \text{ هو } \Delta = (\sqrt{2}ie^{i\theta})^2$$

$$\Delta = (\sqrt{2}e^{i\theta})^2 - 4e^{2i\theta} = 2e^{2i\theta} - 4e^{2i\theta} = -2e^{2i\theta} = (\sqrt{2}ie^{i\theta})^2 \text{ إذن } (E): z^2 - \sqrt{2}ie^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$$

ومنه

$$\Delta = (\sqrt{2}ie^{i\theta})^2$$

(ب) لنكتب الحلين  $z_1$  و  $z_2$  على الشكل المثالي

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta} - \sqrt{2}ie^{i\theta}}{2} = \left[1, -\frac{\pi}{4}\right] \times [1, \theta] = \left[1, \theta - \frac{\pi}{4}\right]$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta} + \sqrt{2}ie^{i\theta}}{2} = \left[1, \frac{\pi}{4}\right] \times [1, \theta] = \left[1, \theta + \frac{\pi}{4}\right] \text{ و منه}$$

$$z_1 = \left[1, \frac{\pi}{4} - \theta\right] \text{ و } z_2 = \left[1, \frac{\pi}{4} + \theta\right]$$

(2) أ) لنبين أن المستقيمين  $(OA)$  و  $(T_1T_2)$  متعامدان :

$$\frac{e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} - e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2}e^{i\theta}} = \frac{-2i \sin \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} = -i = \left[1, -\frac{\pi}{2}\right] \text{ و } \overline{(OA, T_1T_2)} \equiv \text{Arg} \left( \frac{\text{aff}(\overline{T_1T_2})}{\text{aff}(\overline{OA})} \right) \equiv (2\pi)$$

$$\text{إذن } \overline{(OA, T_1T_2)} \equiv -\frac{\pi}{2}(2\pi) \text{ أي أن } \overline{OA} \perp \overline{T_1T_2} \text{ و منه}$$

$$\text{المستقيمين } (OA) \text{ و } (T_1T_2) \text{ متعامدين}$$

(ب) لنبين أن النقط  $O, A, K$  مستقيمية

$$\frac{\text{aff}(\overline{OK})}{\text{aff}(\overline{OA})} = \frac{e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} + e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}}{2\sqrt{2}e^{i\theta}} = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = \left[\frac{1}{2}, 0\right] \text{ و } \overline{(OA, OK)} \equiv \text{Arg} \left( \frac{\text{aff}(\overline{OK})}{\text{aff}(\overline{OA})} \right) \equiv (2\pi)$$

$$\text{إذن } \overline{(OA, OK)} \equiv 0(2\pi) \text{ أي أن المتجهتين } \overline{OA} \text{ و } \overline{OK} \text{ مستقيمتين و منه}$$

$$\text{النقط } O \text{ و } A \text{ و } K \text{ مستقيمية}$$

(ج) نستنتج أن المستقيم  $(OA)$  هو واسط القطعة  $[T_1T_2]$

لدينا  $(OA)$  عمودي على  $(T_1T_2)$  و لدينا  $K$  منتصف القطعة  $[T_1T_2]$  و  $K \in (OA)$  نستنتج أن

**$(OA)$  هو واسط القطعة  $[T_1T_2]$**

(3) أ) الصيغة العقدية للدوران  $r$

لدينا  $z' - e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{2}} \left( z - e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} \right)$  يكافئ  $z' - e^{i(\theta+\frac{3\pi}{4})} = e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})} + e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$  يكافئ  $z' = iz + \sqrt{2}e^{i\theta}$

الصيغة العقدية للدوران  $r$  هي

$$z' = iz + \sqrt{2}e^{i\theta}$$

(ب) نتحقق من أن لحق النقطة  $B$  صورة النقطة  $I$  بالدوران  $r$  هو  $b = \sqrt{2}e^{i\theta} + 1$  لدينا  $b = i \times 1 + \sqrt{2}e^{i\theta} = \sqrt{2}e^{i\theta} + i$  و منه

$$b = \sqrt{2}e^{i\theta} + 1$$

(ج) لدينا  $(2\pi) \equiv \text{Arg} \left( \frac{\text{aff}(\overline{AB})}{\text{aff}(\overline{IJ})} \right)$  و  $\left[ \frac{1}{2}, -\frac{\pi}{2} \right]$   $\frac{b - \sqrt{2}e^{i\theta}}{-2} = \frac{-i}{2}$

إذن  $(\overline{IJ}, \overline{AB}) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi)$  أي أن و بالتالي

**المستقيمين  $(AB)$  و  $(IJ)$  متعامدين**

(4) لدينا  $z_C - \sqrt{2}e^{i\theta} = -i \Leftrightarrow z_C = -i + \sqrt{2}e^{i\theta}$   $t_{-\vec{v}}(A) = C \Leftrightarrow \overline{AC} = -\vec{v}$

و منه لحق النقطة  $C$  صورة النقطة  $A$  بالإزاحة ذات المتجهة  $-\vec{v}$  هو

$$z_C = -i + \sqrt{2}e^{i\theta}$$

(5) لدينا  $z_A = \sqrt{2}e^{i\theta} = \frac{z_C + z_B}{2} = \frac{-i + \sqrt{2}e^{i\theta} + i + \sqrt{2}e^{i\theta}}{2}$

إذن

**$A$  هي منتصف القطعة  $[BC]$**

### التمرين الرابع

$$(I) \quad f \text{ الدالة المعرفة على } ]0, +\infty[ \text{ كما يلي: } \begin{cases} f(x) = \frac{-x \ln x}{1+x^2}; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(1) أ) الدالة  $\ln$  متصلة على  $]0, +\infty[$  و الدالة  $x \mapsto \frac{-x}{1+x^2}$  متصلة على  $\mathbb{R}$  (دالة جذرية معرفة على  $\mathbb{R}$ ) و بالخصوص على  $]0, +\infty[$

إذن الدالة  $f$  متصلة على  $]0, +\infty[$  (جاء دالتين متصلتين)

لندرس اتصال  $f$  على اليمين في  $0$ :  $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x \ln x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  (لأن  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ )

إذن  $f$  متصلة على يمين  $0$

Ammarimaths

 $f$  متصلة على  $]0, +\infty[$  و متصلة على يمين 0 نستنتج أن

$$f \text{ متصلة على المجال } ]0, +\infty[$$

(ب) لندرس إشارة  $f$  على المجال  $]0, +\infty[$ لدينا  $f(0) = 0$  و لكل  $x > 0$  إشارة  $f(x)$  هي عكس إشارة  $\ln x$  ومنه جدول إشارة  $f(x)$  كما يلي:

$x$	0	1	$+\infty$
$\ln x$		-	+
$f(x)$	0	+	-

(2) (أ) لدينا :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\ln x}{x + \frac{1}{x}} = \frac{x \ln x}{x^2 + 1} = -f(x)$$

ومنه

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

(ب) لنبين أن الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $]0, +\infty[$ الدالة  $\ln$  قابلة للإشتقاق على  $]0, +\infty[$  و الدالة  $x \mapsto \frac{-x}{1+x^2}$  قابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  و بالخصوص على  $]0, +\infty[$ إذن الدالة  $f$  قابلة للإشتقاق على  $]0, +\infty[$  (كجاء دالتين قابلتين للإشتقاق على هذا المجال)(ج) لنبين أنه يوجد  $\alpha$  من المجال  $]0, 1[$  يحقق  $f'(\alpha) = 0$ الدالة  $f$  متصلة على المجال  $]0, 1[$  و قابلة للإشتقاق على المجال  $]0, 1[$  وتحقق  $f(0) = f(1)$  إذن حسب مبرهنة رول يوجد على الأقل عنصر  $\alpha$ من المجال  $]0, 1[$  يحقق  $f'(\alpha) = 0$  إذن

$$(\exists \alpha \in ]0, 1[); f'(\alpha) = 0$$

(د) لنستنتج أن  $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$ بما أن  $\alpha \in ]0, 1[$  فإن  $\frac{1}{\alpha} \in ]1, +\infty[$  إذن  $f$  قابلة للإشتقاق عند  $\frac{1}{\alpha}$ ولدينا حسب (2) (أ)  $(\forall x \in \mathbb{R}^*), f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$  نستنتج أن  $(\forall x \in \mathbb{R}^*), f'(x) = -f'\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{-1}{x^2}$ ومنه  $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^2} f'(\alpha) = 0$  إذن  $(\forall x \in \mathbb{R}^*), f'\left(\frac{1}{x}\right) = f'(x) \times \frac{1}{x^2}$ 

الصفحة (5)

Ammarimaths

و منه

$$f' \left( \frac{1}{\alpha} \right) = 0$$

(II)  $F$  دالة معرفة على المجال  $[0, +\infty[$  ب:  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  و  $(C)$  مبيهاها في معلم متعامد ممنظم.

$$(1) \quad (\forall t \in [1, +\infty[); \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1 \text{ نتحقق من أن}$$

$$\text{لدينا } (\forall t \in [1, +\infty[); 0 \leq 1 \leq t^2 \Rightarrow t^2 \leq 1+t^2 \leq 2t^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$$

و منه

$$(\forall t \in [1, +\infty[); \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$$

$$(ب) \text{ لنبين أن } (\forall x \in [1, +\infty[), F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2$$

انطلاقا من المتفاوتة المزدوجة السابقة لدينا الاستلزامات المتوالية التالية:

$$(\forall t \in [1, +\infty[); \left( \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1 \right) \xrightarrow{\left( \frac{\ln t}{t} > 0 \right)} \left( \frac{1}{2} \frac{\ln t}{t} \leq \frac{t \ln t}{1+t^2} \leq \frac{\ln t}{t} \right) \xrightarrow{(x \geq 1)} \left( \int_1^x \frac{1}{2} \frac{\ln t}{t} dt \leq \int_1^x \frac{t \ln t}{1+t^2} dt \leq \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt \right)$$

$$\text{و حيث أن } (\forall t \in [1, +\infty[); -\frac{(\ln x)^2}{2} \leq -\int_1^x \frac{t \ln t}{1+t^2} dt \leq -\frac{(\ln x)^2}{4} \text{ فإن } \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt = \left[ \frac{(\ln t)^2}{2} \right]_1^x = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

وبعد إضافة  $F(1)$  إلى أطراف المتفاوتة المزدوجة الأخيرة نحصل على

$$(\forall t \in [1, +\infty[); F(1) - \frac{(\ln x)^2}{2} \leq F(1) - \int_1^x \frac{t \ln t}{1+t^2} dt \leq F(1) - \frac{(\ln x)^2}{4}$$

و بملاحظة أن  $F(1) - \int_1^x \frac{t \ln t}{1+t^2} dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt = \int_0^x f(t) dt = F(x)$  نحصل على المطلوب:

$$(\forall x \in [1, +\infty[), F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2$$

(ج) الحساب و التأويل الهندسي للنهايتين  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

لدينا حسب خاصيات النهايات و الترتيب

$$\begin{cases} (\forall x \in [1, +\infty[), F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2 = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty$$

$$\begin{cases} (\forall x \in [1, +\infty[), \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{2} \frac{(\ln x)^2}{x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{4} \frac{(\ln x)^2}{x} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{2} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(1)}{x} - \frac{1}{4} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$$

خلاصة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty \text{ إذن } (C) \text{ يقبل فرعاً شلجيميا في إتجاه محور الأفاصيل بجوار } +\infty$$

## Ammarimaths

(2) (أ) قابلية اشتقاق الدالة  $F$  على المجال  $[0, +\infty[$  وحساب  $F'$ 

بما أن  $f$  متصلة على المجال  $[0, +\infty[$  فإن  $F$  هي أصليتها التي تنعدم عند  $0$  و منه  $F$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0, +\infty[$  ولدينا  $(\forall x \in [0, +\infty[); F'(x) = f(x)$

$F$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0, +\infty[$  ولدينا  $(\forall x \in [0, +\infty[); F'(x) = f(x)$

(ب) نعم حسب (1) (أ) من الجزء الأول أن  $f(x) > 0$  على المجال  $]0, 1[$  و  $f(x) < 0$  على المجال  $]1, +\infty[$  إذن جدول تغيرات الدالة  $F$  كما يلي

$x$	0	1	$+\infty$
$F(x)$	0	$F(1)$	$-\infty$

(III) (1) (أ) لنبين أن  $(\forall t \in ]0, +\infty[); -t \ln t \leq \frac{1}{e}$

نضع  $(\forall t \in ]0, +\infty[); \varphi(t) = 1 + e.t \ln t$

لدينا  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = +\infty$  و  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 1$  و  $\varphi'(t) = e.(1 + \ln t)$

إذن جدول تغيرات الدالة  $\varphi$  كما يلي

$x$	0	$1/e$	$+\infty$
$\varphi(x)$	1	0	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة  $\varphi$  نستنتج أن  $(\forall t \in ]0, +\infty[); \varphi(t) \geq 0$

$(\forall t \in ]0, +\infty[); -t \ln t \leq \frac{1}{e}$

(ب) لنبين أن:  $(\forall t \in [0, +\infty[); f(t) \leq \frac{1}{e}$

إذا كان  $t \geq 1$  فإن  $\left(\frac{-t \ln t}{1+t^2} \leq 0 < \frac{1}{e}\right)$  و إذا كان  $0 < t < 1$  فإن  $\left(\frac{1}{1+t^2} < 1 \Rightarrow \frac{-t \ln t}{1+t^2} < \frac{1}{e} \Rightarrow f(t) < \frac{1}{e}\right)$

ومن أجل  $t = 0$  :  $f(0) = 0 < \frac{1}{e}$  نستنتج أن

$(\forall t \in [0, +\infty[); f(t) < \frac{1}{e}$

Ammarimaths

(ج) استنتاج أن  $(\forall x \in ]0, +\infty[); F(x) < x$ لدينا  $(\forall t \in [0, +\infty[); f(t) < \frac{1}{e} \Rightarrow (\forall x > 0); \int_0^x f(t) dt \leq \int_0^x \frac{1}{e} dt$ و لدينا  $\int_0^x \frac{1}{e} dt = \frac{1}{e} [t]_0^x = \frac{x}{e} < x$  إذن

$$(\forall x \in ]0, +\infty[); F(x) < x$$

(2)

$$\begin{cases} u_0 \in ]0, 1[ \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = F(u_n) \end{cases} : (u_n) \text{ متتالية معرفة ب :}$$

(أ) لنبين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in ]0, 1[$ برهان بالترجع : لدينا  $u_0 \in ]0, 1[$  إذن العلاقة صحيحة من أجل  $n = 0$ ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}$  نفترض أن  $u_n \in ]0, 1[$ بما أن  $F$  تزايدية قطعاً على المجال  $]0, 1[$  فإن  $0 < u_{n+1} < 1 \Rightarrow 0 < u_n < 1 \Rightarrow F(0) < F(u_n) < F(1) < 1 \Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1$ إذن  $u_{n+1} \in ]0, 1[$  . نستنتج (حسب مبدأ التراجع) أن

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in ]0, 1[$$

(ب) لنبين أن المتتالية تناقصية قطعاً ثم نستنتج أنها متقاربة

بما أن  $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in ]0, 1[$  فإن  $(\forall n \in \mathbb{N}); F(u_n) < u_n$  (حسب III 1 ج)و منه  $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} < u_n$ إذن المتتالية  $(u_n)$  تناقصية قطعاً $(u_n)$  تناقصية و مصغرة ب 0 إذن متقاربة

$$(u_n) \text{ متقاربة}$$

(ج) لنحسب نهاية المتتالية  $(u_n)$ نضع  $I = ]0, 1[$  الدالة  $F$  متصلة على  $I$  ولدينا  $I \subset ]0, \frac{1}{e}[ \subset I$ 

$$\begin{cases} u_0 \in ]0, 1[ \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = F(u_n) \\ (u_n) \text{ converge} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim u_n = l \\ F(l) = l \\ l \in I \cup \{0\} \end{cases} \text{ إذن}$$

لنحل في  $I \cup \{0\}$  المعادلة  $F(l) = l$ نعلم أن  $(\forall x \in ]0, +\infty[); F(x) < x$  إذن المعادلة ليس لها حل في  $I$  و بالتالي حلها الوحيد هو 0

$$\lim u_n = 0$$



Ammarimaths

التمرين الخامس

$$g \text{ الدالة المعرفة على } ]0, +\infty[ \text{ بما يلي } \begin{cases} g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}; x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

(1) لنبين أن الدالة  $g$  متصلة على  $]0, +\infty[$ 

الدالتان  $x \mapsto \frac{-1}{x}$  و  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  متصلتان على  $]0, +\infty[$  و الدالة  $exp$  متصلة على  $\mathbb{R}$  إذن الدالة  $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$  متصلة على  $]0, +\infty[$

و بالتالي الدالة  $x \mapsto \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$  متصلة على  $]0, +\infty[$  [يعني الدالة  $g$  متصلة على  $]0, +\infty[$

لندرس اتصال الدالة  $g$  على اليمين في 0

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 e^t = 0 = g(0) \text{ إذن } g \text{ متصلة على اليمين في } 0$$

نستنتج أن الدالة  $g$  متصلة على  $]0, +\infty[$ 

$$\forall (x \in ]0, +\infty[); L(x) = \int_0^x g(t) dt \quad (2)$$

(أ) لنبين أن الدالة  $L$  متصلة على  $]0, +\infty[$ 

بما أن الدالة  $g$  متصلة على  $]0, +\infty[$  فإنها تقبل دوالاً أصلية عليه و دالتها الأصلية التي تنعدم عند 0 هي  $\int_0^x g(t) dt$

إذن  $L$  هي أصلية  $g$  على المجال  $]0, +\infty[$  و تحقق  $L(0) = 0$

ومنه  $L$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$  ما يعني أنها متصلة على  $]0, +\infty[$

الدالة  $L$  متصلة على المجال  $]0, +\infty[$ (ب) لنحسب  $L(x)$  من أجل  $x > 0$ 

لدينا  $(\forall x > 0); L(x) = \int_0^x g(t) dt = [G(t)]_0^x = G(x) - G(0)$  حيث  $G$  أصلية ل  $g$

$$\begin{cases} G(x) = e^{-\frac{1}{x}}; x > 0 \\ G(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 \end{cases} \text{ و بما أن } G \text{ متصلة على } ]0, +\infty[ \text{ فإن } G \text{ معرفة كما يلي}$$

نستنتج أن

$$(\forall x > 0); L(x) = e^{-\frac{1}{x}}$$

Ammarimaths

ج) لدينا  $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$  و بما أن  $L$  متصلة على اليمين في 0 فإن  $L(0) = 0$

(3) لنبين أن المتتالية  $(s_n)_{n \geq 1}$  متقاربة و لنحدد نهايتها

$$\text{لدينا } (\forall n \in \mathbb{N}^*); s_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$$

بما أن الدالة  $g$  متصلة على المجال  $[0,1]$  فإن المتتالية  $(s_n)_{n \geq 1}$  متقاربة و لدينا  $\lim s_n = \int_0^1 g(t) dt = L(1) = \frac{1}{e}$

$$\lim s_n = \frac{1}{e}$$

إضافة

مبيان الدوال  $f$  و  $L$

