المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2014
الموضوع

NS 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أ ربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالحسابيات............................(3ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالبنيات الجبرية.....................(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....................(3.5ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل..............................(8ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل ....(2ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول:(3 نقط)

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $a_n = \underbrace{333.......3}_{n\ \text{مرة}}1$ (n مرة الرقم 3)

0.5 1- تحقق أن العددين a_1 و a_2 أوليان.

0.5 2- بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $3a_n + 7 = 10^{n+1}$

0.75 3- بين أن لكل k من $\mathbb{N}$: $10^{30k+2} \equiv 7\ [31]$

0.75 4- بين أن لكل k من $\mathbb{N}$: $3a_{30k+1} \equiv 0\ [31]$ ، ثم استنتج أن 31 يقسم a_{30k+1}

0.5 5- بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ ،إذا كان $n \equiv 1\ [30]$ فإن المعادلة $a_n x + 31y = 1$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

التمرين الثاني:(3.5 نقطة)

نذكر أن$(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي و أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية صفرها $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

لكل a و b من $\mathbb{R}$ ، نضع: $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ ونعتبر المجموعة : $E = \left\{ M(a,b) / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

0.5 1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$.

0.75 2- احسب $J^2 = J \times J$ حيث: $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ثم استنتج أن E جزء غير مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

3- نعرف على $M_2(\mathbb{R})$ قانون التركيب الداخلي $*$ بما يلي : $A*B = A \times N \times B$ حيث : $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ونعتبر التطبيق φ من $\mathbb{C}^*$ نحو $M_2(\mathbb{R})$ الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم $a+ib$ (a و b عددان حقيقيان) بالمصفوفة $M(a,b)$.

0.5 أ) بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو$(M_2(\mathbb{R}),*)$

0.25 ب) نضع: $E^* = E - \{O\}$. بين أن: $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$

0.5 ج) بين أن $(E^*,*)$زمرة تبادلية.

0.5 4- بين أن: $A*(B+C) = A*B + A*C \quad \left(\forall (A,B,C) \in E^3\right)$

0.5 5- استنتج مما سبق أن $(E,+,*)$جسم تبادلي.

التمرين الثالث: (3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث: $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] - \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

1- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2-\sqrt{2}e^{i\theta}z+e^{2i\theta}=0 \quad (E)$

0.25 أ)تحقق أن مميز المعادلة (E) هو: $\Delta=\left(\sqrt{2}ie^{i\theta}\right)^2$

0.75 ب) اكتب على الشكل المثلثي z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{C}$.

2- نعتبر النقط I و J و T_1 و T_2 و A التي ألحاقها على التوالي 1 و -1 و $e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$ و $e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$ و $\sqrt{2}e^{i\theta}$

0.5 أ) بين أن المستقيمين (OA) و (T_1T_2) متعامدان .

0.25 ب)ليكن K منتصف القطعة $[T_1T_2]$. بين أن النقط O و K و A مستقيمية.

0.25 ج)استنتج أن المستقيم (OA) هو واسط القطعة $[T_1T_2]$.

3- ليكن r الدوران الذي مركزه T_1 و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$

0.25 أ)اعط الصيغة العقدية للدوران r .

0.5 ب)تحقق أن لحق النقطة B صورة النقطة I بالدوران r هو: $b=\sqrt{2}e^{i\theta}+i$

0.25 ج)بين أن المستقيمين (IJ) و (AB) متعامدان .

0.25 4- حدد لحق النقطة C صورة النقطة A بالإزاحة التي متجهتها $\left(-\vec{v}\right)$

0.25 5- بين أن النقطة A هي منتصف القطعة $[BC]$.

التمرين الرابع: (8 نقط)

I - نعتبر الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{-x\ln x}{1+x^2}\ ;\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

0.5 1- أ)بين أن الدالة f متصلة على المجال $[0,+\infty[$

0.25 ب)أدرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0,+\infty[$

0.25 2- أ)بين أن: $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x) \qquad \left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)$

0.25 ب) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

ج) بين أن: $\left(\exists \alpha \in \left]0,1\right[\right) \quad f'(\alpha)=0$ — 0.5

د)استنتج أن: $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)=0$ — 0.5

II - نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $\left[0,+\infty\right[$ بما يلي: $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم.

1- أ)تحقق أن: $\left(\forall t \in \left[1,+\infty\right[\right) \quad \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$ — 0.5

ب)بين أن: $\left(\forall x \in \left[1,+\infty\right[\right) \quad F(1)-\frac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1)-\frac{1}{4}(\ln x)^2$ — 1

(لاحظ أن: $F(x)=\int_0^1 f(t)\,dt - \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}\cdot\frac{\ln t}{t}\,dt$)

ج) أحسب $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها. — 1

2- أ)بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $\left[0,+\infty\right[$ ثم أحسب $F'(x)$ — 0.5

ب)أدرس تغيرات الدالة F على المجال $\left[0,+\infty\right[$ — 0.25

III-1- أ) بين أن : $\left(\forall t \in \left]0,+\infty\right[\right) \quad -t\ln t \leq \frac{1}{e}$ — 0.5

ب)بين أن : $\left(\forall t \in \left[0,+\infty\right[\right) \quad f(t) \leq \frac{1}{e}$ — 0.25

ج)استنتج أن: $\left(\forall x \in \left]0,+\infty\right[\right) \quad F(x) < x$ — 0.25

2- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0 \in \left]0,1\right[$ و $u_{n+1}=F(u_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

أ) بين أن: $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \quad u_n \in \left]0,1\right[$ — 0.5

ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة . — 0.5

ج) حدد $\lim_{n\to+\infty} u_n$ — 0.5

التمرين الخامس:(2 نقط)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$\begin{cases} g(x)=\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\ ;\ x>0 \\ g(0)=0 \end{cases}$$

1- بين أن الدالة g متصلة على المجال $[0,+\infty[$	0.5
2- لكل عدد حقيقي x من المجال $[0,+\infty[$ ، نضع $L(x)=\int_x^1 g(t)dt$	
أ)بين أن الدالة L متصلة على المجال $[0,+\infty[$	0.25
ب)أحسب $L(x)$ من أجل $x>0$	0.25
ج)أحسب $\lim_{x\to 0^+} L(x)$ ثم استنتج قيمة $L(0)$	0.5
3- لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر من أو يساوي 1 نضع: $s_n=\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$.	
بين أن المتتالية $(s_n)_{n\geq 1}$ متقاربة ثم حدد نهايتها.	0.5

انتهى