

1(I) ■

ليكن x و y عنصرين من $[1; +\infty[$

إذن : $x \geq 1$ و $y \geq 1$

ومنه : $\sqrt{x} \geq 1$ و $\sqrt{y} \geq 1$

يعني : $(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1)^2 \geq 1$

إذن : $x \perp y \in [1; +\infty[$

و بالتالي \perp قانون تركيب داخلي في I .

2(I) ■

ليكن x و y عنصرين من $[1; +\infty[$

لدينا : $x \perp y = (\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1)^2$

$$\Leftrightarrow x \perp y = (\sqrt{y} + \sqrt{x} - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow x \perp y = y \perp x$$

و منه \perp قانون تبادلي في I .

ليكن x و y و z ثلاثة عناصر من المجال I .

لدينا : $(x \perp y) \perp z = (\sqrt{x \perp y} + \sqrt{z} - 1)^2$

$$\Leftrightarrow (x \perp y) \perp z = (\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 + \sqrt{z} - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x \perp y) \perp z = (\sqrt{x} + (\sqrt{y} + \sqrt{z} - 1) - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x \perp y) \perp z = (\sqrt{x} + \sqrt{y \perp z} - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$$

إذن \perp قانون تجميعي في $[1; +\infty[$.

3(I) ■

ليكن e العنصر المحايد للقانون \perp في I .

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; x \perp e = e \perp x = x$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; (\sqrt{x} + \sqrt{e} - 1)^2 = x$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; \sqrt{x} + \sqrt{e} - 1 = \pm \sqrt{x}$$

في حالة : $\sqrt{x} + \sqrt{e} - 1 = -\sqrt{x}$

نحصل على : $e = (1 - 2\sqrt{x})^2$

لكن : $(1 - 2\sqrt{x})^2 \notin I$ لأنه لدينا $x \in I$

إذن : $x \geq 0$ و منه : $(1 - 2\sqrt{x})^2 < 1$

أما في حالة : $\sqrt{x} + \sqrt{e} - 1 = \sqrt{x}$

نحصل على : $e = 1 \in [1; +\infty[$

و نعلم أن العنصر المحايد إن وجد يكون دائما وحيدا

إذن : 1 هو العنصر المحايد للقانون \perp في المجموعة I .

1(II) ■

لتكن $M(a)$ و $M(b)$ مصفوفتين من E

$$M(a) \times M(b) = \begin{pmatrix} a & 2(a-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 2(b-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{لدينا}$$

$$= \begin{pmatrix} ab & 2(ab-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(ab) \in E$$

إذن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

1(2)(II) ■

ليكن x و y عنصرين من \mathbb{R}^*

لدينا :

$$\varphi(x \times y) = M(xy) = M(x) \times M(y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

إذن φ تشاكل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \times)

ليكن $M(y)$ عنصرا من (E, \times)

لنحل المعادلة $\varphi(x) = M(y)$ ذات المجهول x

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow M(x) = M(y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 2(y-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

و بالتالي : المعادلة $\varphi(x) = M(y)$ تقبل حلا وحيدا في \mathbb{R}^* و هو y

و بتعبير آخر :

$$(\forall M(y) \in E) (\exists ! x \in \mathbb{R}^*) : \varphi(x) = M(y)$$

و منه : φ تقابل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \times)

خلاصة : φ تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \times) .

2(II) ■

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة .

نستنتج إذن بنية (E, \times) انطلاقا من بنية (\mathbb{R}^*, \times)

عن طريق التشاكل التقابلي φ .



■ (I) 1 ب

نعلم أنه إذا كان z_1 و z_2 هما حلا المعادلة : $az^2 + bz + c = 0$

$$\text{فإن : } z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{و} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

$$\text{نستعمل العلاقة : } z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

$$\text{إن : } z_1 z_2 = \left(\frac{5}{3} + 4i\right)$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \frac{\left(\frac{5}{3} + 4i\right) \left(1 - \frac{2}{3}i\right)}{\left(1 + \frac{2}{3}i\right) \left(1 - \frac{2}{3}i\right)}$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \frac{9}{13} \left(\frac{13}{3} + \frac{26}{9}i\right)$$

$$\Leftrightarrow z_2 = 3 + 2i$$

$$\Leftrightarrow z_2 = 3 \left(1 + \frac{2}{3}i\right)$$

$$\Leftrightarrow z_2 = 3z_1$$



■ (II) 1 ا

لدينا : $P = r(A)$

إن حسب الكتابة العقدية للدوران : $(z_P - z_\Omega) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_A - z_\Omega)$

$$\Leftrightarrow (p - \omega) = e^{\frac{i\pi}{3}}(a - \omega)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{p = e^{\frac{i\pi}{3}}(a - \omega) + \omega} \quad (1)$$

و بنفس الطريقة : $B = r(Q)$

$$\Leftrightarrow (z_B - z_\Omega) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_Q - z_\Omega)$$

$$\Leftrightarrow (b - \omega) = e^{\frac{i\pi}{3}}(q - \omega)$$

$$\Leftrightarrow qe^{\frac{i\pi}{3}} = (b - \omega) + \omega e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{q = e^{-\frac{i\pi}{3}}(b - \omega) + \omega} \quad (2)$$



■ (II) 1 ب

في البداية لدينا :

$$\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

لدينا : (\mathbb{R}^*, \times) زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي 1 و كل عنصر x يقبل $\frac{1}{x}$ كممثل.

إن : (E, \times) زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو المصفوفة $\varphi(1)$ و كل مصفوفة $M(x)$ تقبل ممائلة و هي المصفوفة $M\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$\varphi(1) = M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \text{و لدينا :}$$

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = M\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 2\left(\frac{1}{x} - 1\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و}$$

■ (II) 2 ج

لتكن H_n مصفوفة من المجموعة \mathcal{H}

$$\Leftrightarrow H_n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow H_n = \begin{pmatrix} 2^n & 2(2^n - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow H_n = \begin{pmatrix} x & 2(x - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad x = 2^n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \quad \text{و لدينا :} \quad \mathcal{H} \subset E$$

إن \mathcal{H} جزء غير فارغ من E

لتكن : $\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 2^m & 2^{m+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفتين من \mathcal{H}

$$\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^m & 2^{m+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^{-m} & 2(2^{-m} - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n-m} & 2^{n-m+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$$

إن : (\mathcal{H}, \times) زمرة جزئية من (E, \times) .

التمرين الثاني : (3,5 ن)

■ (I) 1 ا

تعويض مباشر و حساب سهل

① ② (II) ■

$$\left(\frac{\omega - a}{\omega - b}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}} \quad \text{نفترض أن :}$$

بالاستعانة بالعلاقة (3) نحصل على :

$$\frac{p - a}{q - b} = \left(\frac{\omega - a}{\omega - b}\right) e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p - a}{q - b} = e^{\frac{2i\pi}{3}} \times e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{2i\pi} = 1$$

إذن : $(p - a) = (q - b)$

يعني : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BQ}$

و منه حسب التعريف المتجهي لمتوازي الأضلاع : $APBQ$ متوازي أضلاع.

$$\frac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}} = \frac{e^{\frac{4i\pi}{3}} \left(e^{-\frac{4i\pi}{3}} - e^{-i\pi} \right)}{\left(1 - e^{-\frac{i\pi}{3}} \right)} \quad \text{نطلق إذن من الكتابة :}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}} = \frac{e^{\frac{4i\pi}{3}} \left(\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right) + 1 \right)}{\left(1 - \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) \right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}} = \frac{e^{\frac{4i\pi}{3}} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1 \right)}{\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)}$$

② (II) ■

لدينا حسب النتيجة (1) :

$$(p - a) = \omega + ae^{\frac{i\pi}{3}} - \omega e^{\frac{i\pi}{3}} - a$$

$$\Leftrightarrow (p - a) = \left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}} \right) (\omega - a) \quad (4)$$

و لدينا كذلك حسب افتراض السؤال ② : $\left(\frac{\omega - a}{\omega - b}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

$$(5) \quad (\omega - b) = e^{-\frac{2i\pi}{3}} (\omega - a) \quad \text{إذن :}$$

و لدينا من جهة أخرى :

$$(b - a) = (\omega - a) - (\omega - b)$$

إذن باستعمال العلاقة (5) نحصل على :

$$(b - a) = (\omega - a) - (\omega - b)$$

$$\Leftrightarrow (b - a) = (\omega - a) - e^{-\frac{2i\pi}{3}} (\omega - a)$$

$$\Leftrightarrow (b - a) = (\omega - a) \left(1 - e^{-\frac{2i\pi}{3}} \right) \quad (6)$$

من (4) و (6) نستنتج أن :

$$\frac{b - a}{p - a} = \frac{(\omega - a) \left(1 - e^{-\frac{2i\pi}{3}} \right)}{\left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}} \right) (\omega - a)} = \frac{1 - e^{-\frac{2i\pi}{3}}}{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b - a}{p - a} = \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b - a}{p - a} = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$$



$$\Leftrightarrow \frac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

③ ① (II) ■

لدينا حسب العلاقتين (1) و (2) من السؤال ① (i) :

$$(p - a) = \omega + ae^{\frac{i\pi}{3}} - \omega e^{\frac{i\pi}{3}} - a$$

$$\Leftrightarrow (p - a) = \omega \left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}} \right) + a \left(e^{\frac{i\pi}{3}} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow (p - a) = \left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}} \right) (\omega - a) \quad (1)$$

و لدينا كذلك : $(q - b) = \omega + be^{-\frac{i\pi}{3}} - \omega e^{-\frac{i\pi}{3}} - b$

$$\Leftrightarrow (q - b) = \omega \left(1 - e^{-\frac{i\pi}{3}} \right) + b \left(e^{-\frac{i\pi}{3}} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow (q - b) = \left(1 - e^{-\frac{i\pi}{3}} \right) (\omega - b) \quad (2)$$

و منه : $\frac{p - a}{q - b} = \left(\frac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}} \right) \left(\frac{\omega - a}{\omega - b} \right) = \left(\frac{\omega - a}{\omega - b} \right) e^{\frac{4i\pi}{3}}$

$$(3) \quad \frac{p - a}{q - b} = \left(\frac{\omega - a}{\omega - b} \right) e^{\frac{4i\pi}{3}} \quad \text{و بالتالي :}$$



بما أن $49 \wedge 6 = 1$ فإنه حسب *Gauss* نحصل على : $49 / (y - 8)$

ومنه : $y = 49k + 8$; $(\exists k \in \mathbb{Z})$

نعوض y بقيمته في المعادلة (*) نحصل على :

$$49(x - 1) = 6(49k)$$

$$\Leftrightarrow x = 6k + 1$$

عكسيا : لدينا : $49(6k + 1) - 6(49k + 8) = 1$

و بالتالي : مجموعة حلول المعادلة تكتب على شكل :

$$\mathcal{S} = \{ (6k + 1 ; 49k + 8) / k \in \mathbb{Z} \}$$

■ (3) (i)

نعلم أنه إذا كانت q^n متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي الغير المنعدم q فإن :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

لدينا 7^n متتالية هندسية أساسها 7 إذن :

$$1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2007} = \frac{7^{2007+1} - 1}{7 - 1}$$

$$\Leftrightarrow N = \frac{7^{2008} - 1}{6}$$

$$\Leftrightarrow 7^{2008} - 6N = 1$$

$$\Leftrightarrow 7^2 \cdot 7^{2006} - 6N = 1$$

$$\Leftrightarrow 49 \cdot 7^{2006} - 6N = 1$$

إذن الزوج $(7^{2006}, N)$ حل للمعادلة (E).

■ (3) (b)

$$\begin{cases} 1 \equiv 1[4] \\ 7 \equiv -1[4] \end{cases} \text{ لدينا :}$$

$$\begin{cases} 7^2 \equiv 1[4] \\ 7^3 \equiv -1[4] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7^4 \equiv 1[4] \\ 7^5 \equiv -1[4] \end{cases}$$

⋮ ⋮

$$\begin{cases} 7^{2006} \equiv 1[4] \\ 7^{2007} \equiv -1[4] \end{cases}$$

نضرب طرفي آخر نتيجة في العدد العقدي $(1 + i\sqrt{3})$ نحصل على :

$$\Leftrightarrow \frac{b-a}{p-a} = \frac{1}{4}(3 + i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3}) = i\sqrt{3}$$

و بالتالي : $\left(\frac{b-a}{p-a}\right) = i\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right) \equiv \arg(i\sqrt{3})[2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Rightarrow \overline{(AP, AB)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

\Rightarrow زاوية قائمة $P\hat{A}B$

و بما أن : $APQB$ متوازي أضلاع و إحدى زواياه قائمة.

فإن $APQB$ مستطيل.

التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ (1) (i)

لدينا الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من 503 هي : 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 و 17 و 19 و لا أحد من هذه الأعداد يقسم العدد 503 .

إذن 503 عدد أولي.

■ (1) (b)

بما أن 503 عدد أولي و 7 عدد أولي كذلك.

فإنه حسب (*Fermat*) : $7^{503-1} \equiv 1[503]$

يعني : $7^{502} \equiv 1[503]$

ومنه : $(7^{502})^4 \equiv 1^4[503]$

أي : $7^{2008} \equiv 1[503]$

■ (2)

لدينا : (1,8) حل خاص للمعادلة (E).

و ليكن (x, y) الحل العام للمعادلة (E).

$$\begin{cases} 49 \times 1 - 6 \times 8 = 1 \\ 49x - 6y = 1 \end{cases} \text{ إذن :}$$

ننجز عملية الفرق بين المعادلتين طرفا بطرف نحصل على :

$$49(x - 1) = 6(y - 8) \quad (*)$$

$$\Rightarrow 49 / 6(y - 8)$$

■ (II) 2

ليكن x عددا حقيقيا .

$$f'(x) = e^x \ln(1 + e^{-x}) + e^x \left(\frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = e^x \left(\ln(1 + e^{-x}) - \left(\frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = e^x g(e^{-x})$$

■ (II) 3

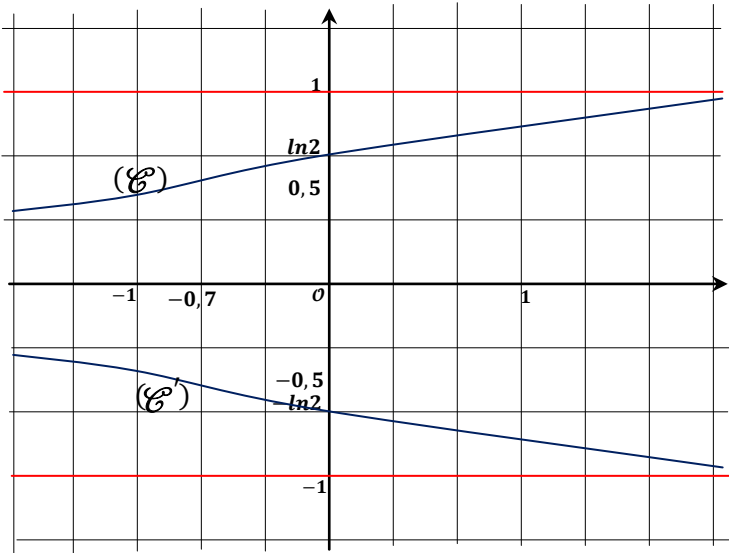
لدينا : $f'(x) = e^x g(e^{-x})$

إذن f' لا تنعدم أبدا و إشارتها موجبة دائما .

و نستنتج جدول تغيرات f كما يلي :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
f		↗ 1

■ (II) 4



■ (II) 5

ليكن x عنصرا من $]-1,0[$.

إذن : $-1 < x < 0$ و منه $e^{-x} < e$ و $e^x < 1$

يعني : $g(e^{-x}) < g(e)$ و $e^x < 1$

إذن : $0 < e^x g(e^{-x}) < g(e)$ أي : $0 < f'(x) < g(e)$



نجمع هذه المتوافقات طرفا بطرف نحصل على :

$$1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2006} + 7^{2007} \equiv 0[4]$$

$$\Leftrightarrow N \equiv 0[4]$$

لدينا حسب 1 (ب) $7^{2008} \equiv 1[503]$ إذن : $503 / (7^{2008} - 1)$

و نعلم أن : $(7^{2008} - 1) = 6N$ إذن : $503 / 6N$

و بما أن 503 عدد أولي و 3×2 هو التفكير الأولي للعدد 6 فإن : $503 \wedge 6 = 1$

و منه حسب (Gauss) : $503 / N$

و بالتالي : $N \equiv 0[503]$

■ (III) 3

لدينا : $503 \wedge 4 = 1$ لأن : 503 عدد أولي.

و لأن 2^2 هو التفكير الأولي للعدد 4

و نعلم أن : $4 / N$ و $503 / N$

إذن : $4 \times 503 / N$ يعني : $2012 / N$

التمرين الرابع : (7,5 ن)

■ (I) 1

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \left(\frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} \right) \text{ لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

إذن : g' تنعدم في 0 و إشارتها موجبة على المجال $[0, +\infty[$.

و منه g دالة تزايدية على المجال $[0, +\infty[$.

■ (I) 2

ليكن x عنصرا من $[0, +\infty[$.

إذن $x \geq 0$ و منه : $g(x) \geq g(0) = 0$

و بالتالي : $\forall x \in [0, +\infty[; g(x) \geq 0$

■ (II) 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{e^{-x}}$$

نضع : $t = e^{-x}$ نحصل على :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + t) - \ln(1 + 0)}{t - 0} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (\ln(e^x + 1) - \ln(e^x))$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(e^x + 1) - x e^x = 0$$

∞ ∞ 0^+ 0^+ 0^-

6(II) ■

نضع : $h(x) = f(x) + x$

لدينا : $h'(x) = f'(x) + 1$

بما أن : $f'(x) > 0$ حسب السؤال 5

فإن : $h'(x) > 1 > 0$ ومنه : h دالة تزايدية قطعاً على \mathbb{R}

ومنه : h تقابل من أي مجال $[x, y]$ من \mathbb{R} نحو صورته بالدالة h .

نختار المجال $[-1, 0]$.

إن h تقابل من $[-1, 0]$ نحو $f([-1, 0])$

ولدينا : $h([-1, 0]) = [h(-1), h(0)] \approx \left[-\frac{1}{2}, \ln 2\right]$

و بما أن : $0 \in \left[-\frac{1}{2}, \ln 2\right]$

فإن الصفر يمتلك سابقاً واحداً بالتقابل h في المجال $[-1, 0]$.

و بتعبير آخر : $\exists! \alpha \in [-1, 0] ; h(\alpha) = 0$

و بما أن : $h(-1) \neq h(0) \neq 0$

فإن : $\exists! \alpha \in]-1, 0[; h(\alpha) = 0$

أي : $\exists! \alpha \in]-1, 0[; f(\alpha) + \alpha = 0$

7(II) ■

من أجل $n = 0$ لدينا : $-1 \leq u_0 = 0 \leq 0$

نفترض أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; -1 \leq u_n \leq 0$

حسب التمثيل المبياني للدالة f : $f(x) \geq 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

(1)

إن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; f(u_n) \geq 0$

ولدينا حسب الإفتراض : $u_n \leq 0$

إن : $f(u_n) \leq \ln 2$ لأن f تزايدية على \mathbb{R} .

ومنه : $f(u_n) \leq 1$ لأن : $\ln 2 \approx 0,6$

(2)

من (1) و (2) نستنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq f(u_n) \leq 1$

$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) ; -1 \leq -f(u_n) \leq 0$

$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) ; -1 \leq u_{n+1} \leq 0$

و بالتالي حسب مبدأ التراجع : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; -1 \leq u_n \leq 0$

7(II) ■

لدينا f دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} كله.

نستطيع إذن تطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على أي مجال من \mathbb{R}

نختار المجال الذي طرفاه u_n و α و الذي سنرمز له بالرمز $[\alpha, u_n]$

لأننا لا ندري من الأكبر هل u_n أم α .

$\Rightarrow \exists c \in]\alpha, u_n[; \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} = f'(c)$

$\Rightarrow \exists c \in]\alpha, u_n[; |f(u_n) - f(\alpha)| = f'(c)|u_n - \alpha|$

$\Rightarrow \exists c \in]\alpha, u_n[; |-u_{n+1} + \alpha| = f'(c)|u_n - \alpha|$

$\Rightarrow \exists c \in]\alpha, u_n[; |u_{n+1} - \alpha| = f'(c)|u_n - \alpha|$

بما أن : $0 \leq f'(x) \leq g(e)$

فإن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq f'(x)|u_n - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$

ومنه : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$

7(II) ■

لدينا حسب السؤال 6 :

$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$

من أجل $(n - 1)$ نحصل على :

$|u_n - \alpha| \leq g(e)|u_{n-1} - \alpha|$

$\leq (g(e))^2 |u_{n-2} - \alpha|$

$\leq (g(e))^3 |u_{n-3} - \alpha|$

⋮ ⋮

$\leq (g(e))^n |u_{n-n} - \alpha|$

إن : $|u_n - \alpha| \leq (g(e))^n |0 - \alpha|$

و بما أن : $\alpha \in]-1, 0[$ و ذلك حسب السؤال 6

فإن : $|0 - \alpha| = |\alpha| < 1$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$



لدينا حسب السؤال (7) ج

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$$

و نلاحظ أن $(g(e))^n$ متتالية هندسية أساسها $g(e)$ و هو عدد

موجب أصغر من 1

$$g(e) < 0,6 < 1 \quad \text{لأن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (g(e))^n = 0 \quad \text{إذن}$$

و منه حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha \quad \text{أي}$$



التمرين الخامس : (2,5 ن)

1 ■

$$F(1) = \int_1^1 \left(\frac{\ln t}{1+t^2} \right) dt = 0$$

2 (i) ■

لدينا الدالة : $t \rightarrow \frac{\ln t}{1+t^2}$ متصلة على $]0, +\infty[$

إذن فهي تقبل دالة أصلية ψ على $]0, +\infty[$ بحيث :

$$\psi'(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} \quad \text{و} \quad \psi(x) - \psi(0) = \int_0^x \left(\frac{\ln t}{1+t^2} \right) dt$$

$$F(x) = \psi(x) - \psi\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{بما أن}$$

فإن F قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ لأنها مجموع دالة و مركب

دالتين قابلتين للإشتقاق على $]0, +\infty[$

$$F'(x) = \psi'(x) + \left(\frac{1}{x}\right)' \psi'\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{و لدينا}$$

$$= \left(\frac{\ln x}{1+x^2} \right) - \left(\frac{-1}{x^2} \right) \left(\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \right)$$

$$= \left(\frac{\ln x}{1+x^2} \right) - \left(\frac{\ln x}{1+x^2} \right) = 0$$

2 (b) ■

بما أن : $F'(x) = 0 \quad ; \quad (\forall x \in]0, +\infty[)$

فإن : $F(x) = c \in \mathbb{R} \quad ; \quad (\forall x \in]0, +\infty[)$

و بما أن : $F(1) = 0$ فإن $c = 0$

و بالتالي : $F(x) = 0 \quad ; \quad (\forall x \in]0, +\infty[)$

3 ■

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \left(\frac{\ln t}{1+t^2} \right) dt = 0$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \left(\frac{1}{1+t^2} \right) (\ln t) dt$$

\swarrow u \searrow v'

$$\Leftrightarrow F(x) = \left[(\text{Arctan}(t)) (\ln t) \right]_{\frac{1}{x}}^x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \ln(x) \cdot \text{Arctan}(x) - \ln\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \left(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt \quad (*)$$

4 ■

نعتبر الدالة العددية φ المعرفة على \mathbb{R}^* بما يلي :

$$\varphi(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \text{Arctan}(x)$$

لدينا φ قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]0, +\infty[$ و $]-\infty, 0[$

لأنها تضم دوال اعتيادية كلها معرفة و قابلة للإشتقاق على

$]0, +\infty[$ و $]-\infty, 0[$

$$\varphi'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' \left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \right) + \left(\frac{1}{1+x^2} \right) \quad \text{و لدينا}$$

$$= \left(\frac{-1}{x^2} \right) \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) + \left(\frac{1}{1+x^2} \right)$$

$$= \frac{-1}{x^2+1} + \frac{1}{1+x^2} = 0$$





إن دالة ثابتة على كل من المجالين $]0, +\infty[$ و $]-\infty, 0[$

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty, 0[; \varphi(x) = c_1 \in \mathbb{R} \\ \forall x \in]0, +\infty[; \varphi(x) = c_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{أو بتعبير آخر :}$$

نعوض x بالقيمتين 1 و -1 و ذلك من أجل إيجاد c_1 و c_2 نحصل على :

$$\begin{cases} c_1 = \varphi(-1) = 2\text{Arctan}(-1) = 2\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{-\pi}{2} \\ c_2 = \varphi(1) = 2\text{Arctan}(1) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} ; \forall x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} ; \forall x < 0 \end{cases} \quad \text{و بالتالي :}$$

ما يهمنا من هذه النتيجة هو : $(\forall x > 0) ; \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow (\forall x > 0) ; \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\forall x > 0) ; \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x) \quad (**)$$

4 ■

نستغل إذن النتيجة (*) و (**) في الإجابة على هذا السؤال.

$$(\forall x > 0) ; F(x) = 0 \quad \text{لدينا :}$$

إذن :

$$\left(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} \ln x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt = \ln x$$

و الحمد لله رب العالمين ■

