التمرين الأول : (3,25 ن)

■ 1 أ

لدينا E جزء غير فارغ من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ لأن : $M(0,0)\epsilon E$.

ليكن γ و β عددين حقيقيين و $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من E .

$$\begin{aligned}\gamma M(a,b)+\beta M(c,d) &= \gamma\begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ \frac{-1}{\sqrt{3}}b & a\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} c & \sqrt{3}d \\ \frac{-1}{\sqrt{3}}d & c\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma a+\beta c & \sqrt{3}(\gamma b+\beta d) \\ \frac{-1}{\sqrt{3}}(\gamma b+\beta d) & \gamma a+\beta c\end{pmatrix} \\ &= M(\gamma a+\beta c\ ,\gamma b+\beta d)\ \epsilon\ E\end{aligned}$$

إذن :

$(\forall\gamma,\beta\epsilon\mathbb{R}),(\forall M(a,b),M(c,d)\ :\ \gamma M(a,b)+\beta M(c,d)\ \epsilon\ E$

إذن : $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

■ 1 ب

من الواضح أن الأسرة (I,J) مولدة للفضاء المتجهي $(E,+,\cdot)$.

لأن : $(\forall M(a,b)\ \epsilon\ E\ )\ :\ M(a,b)=aI+bJ$.

لتكن $\alpha I+\beta J$ تأليفة خطية منعدمة للمصفوفتين I و J .

$$\Leftrightarrow\quad \alpha I+\beta J=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} \alpha & \sqrt{3}\beta \\ \frac{-1}{\sqrt{3}}\beta & \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad \alpha=\beta=0$$

إذن (I,J) أسرة حرة (أو مستقلة خطيا)

و بالتالي (I,J) أساس للفضاء المتجهي $(E,+,\cdot)$.

■ 2 أ

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من الفضاء المتجهي E

لدينا : $$\begin{aligned}M(a,b)\times M(c,d) &= (aI+bJ)\times(cI+dJ) \\ &= acI+adJ+bcJ+bdJ^2\end{aligned}$$

و لدينا :

$$J^2=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I$$

$$\begin{aligned}M(a,b)\times M(c,d) &= (ac-bd)I+(ad+bc)J \\ &= M(\ ac-bd\ ,ad+bc\ )\ \epsilon\ E\end{aligned}$$

إذن : E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

■ 2 ب

ليكن $(a+ib)$ و $(c+id)$ عددين عقديين غير منعدمين.

لدينا :

$$\begin{aligned}f\big((a+ib)\times(c+id)\big) &= f\big((ac-bd)+i(ad+bc)\big) \\ &= M\big((ac-bd)\,,(ad+bc)\big) \\ &= M(a,b)\times M(c,d) \\ &= f(a+ib)\times f(c+id)\end{aligned}$$

إذن : f تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$.

لتكن $M(a,b)$ مصفوفة من E^* .

لنحل المعادلة : $f(x+iy)=M(a,b)$.

$$\Leftrightarrow\quad M(x,y)=M(a,b)$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} x & \sqrt{3}y \\ \frac{-1}{\sqrt{3}}y & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ \frac{-1}{\sqrt{3}}b & a\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x=a \\ y=b\end{cases}$$

إذن المعادلة $f(x+iy)=M(a,b)$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{C}^*$

إذن : f تقابل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$.

<u>خلاصة</u> : f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$.

■ 3

نعلم أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

إذن : $\boxed{(E,+)\ \text{زمرة تبادلية}}$ (1)

و لدينا كذلك $(\mathbb{C}^*,\times)$ زمرة تبادلية .

إذن : $\boxed{(E^*,\times)\ \text{زمرة تبادلية لأن}\ f\ \text{تشاكل تقابلي}}$.(2)

بما أن الضرب $\times$ توزيعي بالنسبة للجمع في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

و بما أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

$\boxed{\text{فإن}\ \times\ \text{توزيعي بالنسبة للجمع في}\ E}$ (3)

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $(E,+,\times)$ جسم تبادلي .

■ ④

لنحل في E المعادلة : $J\times X^3 = I$.

$$\Leftrightarrow \quad -J\times J\times X^3 = -J$$

$$\Leftrightarrow \quad -J^2\times X^3 = -J$$

$$\Leftrightarrow \quad X^3 = -J$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(M(a,b)\right)^3 = M(0,-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(f(a+ib)\right)^3 = f(-i)$$

$$\Leftrightarrow \quad f\left((a+ib)^3\right) = f(-i)$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+ib)^3 = -i$$

لنحل إذن في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3 = -i$.

نضع : $z = re^{i\theta}$ إذن : $r^3e^{3i\theta} = e^{\frac{-\pi i}{2}}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \dfrac{-\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}, \quad k \in \{0,1,2\}$$

من أجل $k=0$ لدينا : $z_0 = e^{\frac{-\pi}{6}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

إذن المصفوفة $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right)$ حل للمعادلة الأولى في E

إذا كان $k=1$ فإن : $z_1 = e^{\frac{\pi}{2}i} = i$

إذن المصفوفة $M(0,1)$ حل للمعادلة الأولى في E

إذا كان $k=2$ فإن : $z_2 = e^{\frac{7\pi}{6}i} = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

إذن المصفوفة $M\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\frac{-1}{2}\right)$ حل للمعادلة الأولى في E

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة $J\times X^3 = I$ في E تكتب على الشكل :

$$\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}I - \frac{1}{2}J\right), (J), \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}I - \frac{1}{2}J\right)\right\}$$

التمرين الثاني : (3,75 ن)

■ (I) ① أ

بعد عملية النشر و التبسيط نحصل على :

$$\Delta = (a - \bar{a} - i)^2$$

■ (I) ① ب

لدينا : $\Delta = (a - \bar{a} - i)^2$

إذن : $z_1 = \dfrac{(i - a - \bar{a}) - (a - \bar{a} - i)}{2i} = 1 + ai$

و $z_2 = \dfrac{(i - a - \bar{a}) + (a - \bar{a} - i)}{2i} = \bar{a}i$

إذن مجموعة حلول المعادلة (G) تكتب على شكل :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{1 + ai\ ,\bar{a}i\}}$$

■ ②

لدينا المعادلة (G) تقبل الحلين : $\bar{a}i$ و $1 + ai$.

إذا كان a حلا للمعادلة (G) فإن : $a = \bar{a}i$ أو $a = 1 + ai$.

يعني : $\mathcal{Re}(a) + i\,\mathfrak{Im}(a) = \mathfrak{Im}(a) + i\,\mathcal{Re}(a)$

أو : $\left(1 - \mathfrak{Im}(a)\right) + i\,\mathcal{Re}(a) = \mathcal{Re}(a) + i\,\mathfrak{Im}(a)$

إذن في كلتا الحالتين نحصل على : $\mathfrak{Im}(a) = \mathcal{Re}(a)$.

عكسيا :

ليكن a عددا عقديا مكتوبا على شكل $a = r + ri$.

لدينا : $\bar{a}i = (r - ri)i = ri + r = a$.

إذن a حل للمعادلة (G) لأنه مكتوب على شكل $\bar{a}i$.

و بالتالي : $\mathfrak{Im}(a) = \mathcal{Re}(a) \Leftrightarrow a$ حل لـ (G) .

■ (II) ① أ

$$\bar{z} = \overline{\left(\frac{(1+ai) - a}{i\bar{a} - a}\right)} = \frac{(1 - \bar{a}i) - \bar{a}}{-ia - \bar{a}} = \frac{1 - i\bar{a} - \bar{a}}{-ia - \bar{a}} = \frac{1 - \bar{a}(i+1)}{-ia - \bar{a}}$$

نضرب البسط و المقام في العدد العقدي $(-i)$ نحصل على :

$$\boxed{\bar{z} = \frac{-i + \bar{a}(i-1)}{-a + \bar{a}i}}$$

■ ①ب

ننطلق من كون $A(a)$ و $B(i\bar{a})$ و $C(1+ai)$ نقط مستقيمية .

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(1+ai)-a}{i\bar{a}-a} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{\left(\frac{(1+ai)-a}{i\bar{a}-a}\right)} = \frac{(1+ai)-a}{i\bar{a}-a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(1-\bar{a}i)-\bar{a}}{-ia-\bar{a}} = \frac{(1+ai)-a}{i\bar{a}-a}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(1-\bar{a}i)-\bar{a}}{-ia-\bar{a}} = \frac{(i-a)-ai}{-\bar{a}-ai}$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-\bar{a}i)-\bar{a} = (i-a)-ai$$

$$\Leftrightarrow \quad i(a-\bar{a})+(a-\bar{a}) = (i-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (a-\bar{a}) = \frac{(i-1)}{(i+1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad (2\mathfrak{Im}(a))i = \frac{-2i}{-2} = i$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\mathfrak{Im}(a) = \frac{1}{2}}$$

■ ②أ

ننطلق من الكتابة : $\mathcal{R}_1(B) = B'$

$$\Leftrightarrow \quad (z_{B'} - z_A) = e^{\frac{-\pi}{2}i}(z_B - z_A)$$

$$\Leftrightarrow \quad (b'-a) = -i(i\bar{a}-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad b' = \bar{a} + ia + a$$

بنفس الطريقة ننطلق من الكتابة : $\mathcal{R}_2(C) = C'$

$$\Leftrightarrow \quad (z_{C'} - z_A) = e^{\frac{\pi}{2}i}(z_C - z_A)$$

$$\Leftrightarrow \quad (c'-a) = i(1+ai-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad c' = i(1-a)$$

■ ②ب

لدينا E هي منتصف القطعة $[BC]$.

إذن : $z_E = \dfrac{z_B + z_C}{2} = \dfrac{i\bar{a}+ai+1}{2}$

و لدينا :

$$\frac{z_{C'} - z_{B'}}{z_E - z_A} = \frac{i(1-a)-(\bar{a}+ia+a)}{\frac{i\bar{a}+ai+1}{2} - a}$$

$$= 2\left(\frac{i-2ai-\bar{a}-a}{i\bar{a}+ai+1-2a}\right)$$

$$= 2i\left(\frac{1-2a+\bar{a}i+ai}{i\bar{a}+ai+1-2a}\right)$$

$$= 2i$$

إذن : $(\sharp) \quad \boxed{\dfrac{z_{C'} - z_{B'}}{z_E - z_A} = 2i}$

$$\Leftrightarrow \quad arg\left(\frac{z_{C'} - z_{B'}}{z_E - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{\left(\overrightarrow{AE}\,,\overrightarrow{B'C'}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad (AE) \perp (B'C')$$

و لدينا كذلك حسب النتيجة $(\sharp)$ $\quad \left|\dfrac{z_{C'} - z_{B'}}{z_E - z_A}\right| = 2$

إذن : $|z_{C'} - z_{B'}| = 2|z_E - z_A|$

$$\Leftrightarrow \quad B'C' = 2AE$$

التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ (I)①

لدينا : $35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$

إذن : $(11,4)$ حل خاص للمعادلة (E) .

■ (I)②

لدينا حسب السؤال ① : $35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$

إذن حسب مبرهنة $Bezout$: $35 \wedge 96 = 1$

ليكن (u,v) الحل العام للمعادلة (E) .

لدينا : $\begin{cases} 35u - 96v = 1 \\ 35 \times 11 - 96 \times 4 = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{35(u-11) = 96(v-4)} \quad \otimes$$

إذن : $35 / 96(v-4)$

و بما أن : $35 \wedge 96 = 1$

فإنه حسب $Gauss$. $35 / (v-4)$

إذن : $(\exists k \in \mathbb{Z}) \; : \; v = 35k+4$

نعوض v بقيمته في المتساوية $\otimes$ نحصل على :

$$35(u-11) = 96 \times 35k$$

إذن : $u = 96k + 11$

و بالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) تكتب على الشكل :

$$\mathcal{S} = \{(96k+11 \,;\, 35k+4) \;;\; k \in \mathbb{Z}\}$$

■(II)(1)(أ)

لدينا 2 و 3 و 5 و 7 هي الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من 97 و لا أحد من هذه الأعداد يقسم العدد 97

إذن : 97 عدد أولي .

ليكن : $x \wedge 97 = d$ إذن : $d / 97$

و بما أن 97 عدد أولي فإنه يمتلك قاسمين صحيحين طبيعيين فقط و هما 97 و 1 .

و منه : $d = 97$ أو $d = 1$.

نفترض أن : $d = 97$.

لدينا $x \wedge 97 = d$ و منه : d / x

و منه : $x \equiv 0[97]$ أي : $x^{35} \equiv 0[97]$

إذن : x ليس حلا للمعادلة (F) و هذا يتناقض مع المعطيات الصريحة.

و بالتالي : $d = 1$ و منه : $x \wedge 97 = 1$.

■(II)(1)(ب)

لدينا : $x \wedge 97 = 1$ و 97 عدد أولي .

إذن حسب مبرهنة $(Fermat)$: $x^{97-1} \equiv 1[97]$

أي : $x^{96} \equiv 1[97]$.

■(II)(1)(ج)

نعلم أن $(11,4)$ حل للمعادلة (E) .

و نعلم كذلك أن : $35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$.

لدينا x حل للمعادلة (F) .

إذن : $x^{35} \equiv 2[97]$ و منه : $\boxed{x^{35\times 11} \equiv 2^{11}[97]}$ (1)

و لدينا كذلك حسب نتيجة السؤال (1)(ب): $x^{96} \equiv 1[97]$.

إذن : $\boxed{x^{-96\times 4} \equiv 1[97]}$ (2)

نضرب المتوافقتين (1) و (2) طرفا بطرف نحصل على :

$$x^{35\times 11 - 96 \times 4} \equiv 2^{11}[97]$$

و بالتالي : $\boxed{x^{1} \equiv 2^{11}[97]}$.

■(II)(2)

لدينا : $x \equiv 2^{11}[97]$

$\Rightarrow \; x^{35} \equiv 2^{11\times 35}[97]$

$\Rightarrow \; x^{35} \equiv 2^{96\times 4+1}[97]$

$\Rightarrow \; \boxed{x^{35} \equiv 2^{96\times 4} \times 2[97]}$ $(\ast)$

و نعلم أن 97 و 2 عددان أوليان :

إذن حسب $Fermat$: $2^{96} \equiv 1[97]$.

يعني : $2^{96\times 4} \equiv 1[97]$ أي : $2^{96\times 4} \times 2 \equiv 2[97]$

بالرجوع إلى المتوافقة $(\ast)$ نحصل على : $x^{35} \equiv 2[97]$

و بالتالي : x حل للمعادلة (F) .

■(II)(3)

في الأسئلة السابقة تمكنا من إثبات التكافؤ التالي :

$$x^{35} \equiv 2[97] \iff x \equiv 2^{11}[97]$$

نستعين بالآلة الحاسبة للحصول على :

$2^{11} = 2048$ و منه كذلك : $2^{11} \equiv 11[97]$.

إذن : $x \equiv 11[97]$.

أي : $(\exists k \in \mathbb{Z}) \; : \; x = 97k + 11$

و منه : مجموعة حلول المعادلة (F) تكتب على الشكل :

$$\mathcal{S} = \{\, 97k + 11 \;;\; k \in \mathbb{Z} \,\}$$

التمرين الرابع : (10 ن)

■(I)(1)(أ)

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x - e^{-x^2} - 2x\right) = 0$

يعني أن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب لـ $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$

■(I)(1)(ب)

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}_+$.

لدينا : $f'(x) = 2 + 2xe^{-x^2} > 0$.

إذن f دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+$.

و لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x - e^{-x^2}\right) = +\infty$

نستنتج إذن جدول تغيرات f كما يلي :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	-1 $\nearrow$ $+\infty$

■ (I) (1) (ج)

لدينا : f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$

إذن : f تزايدية قطعا على $]0,1[$

و منه : f تقابل من المجال $]0,1[$ نحو صورته $\left]-1\,,2-\frac{1}{e}\right[$

و لدينا : $2-\frac{1}{e}\approx 1{,}6$ إذن : $0\in\left]-1\,,2-\frac{1}{e}\right[$

و بالتالي : 0 يمتلك سابقا واحدا في المجال $]0,1[$ بالتقابل f

يعني : $\exists!\ \alpha\in\,]0,1[\ : f(\alpha)=0$

■ (I) (1) (د)

لدينا : $f(\alpha)=0$ و $\alpha\in\,]0,1[$

إذا كان $0<x<\alpha$ فإن : $f(x)<f(\alpha)$ لأن f تزايدية.

و منه : $f(x)<0$

إذا كان $\alpha<x<1$ فإن : $f(x)>f(\alpha)$ لأن f تزايدية.

و منه : $f(x)>0$

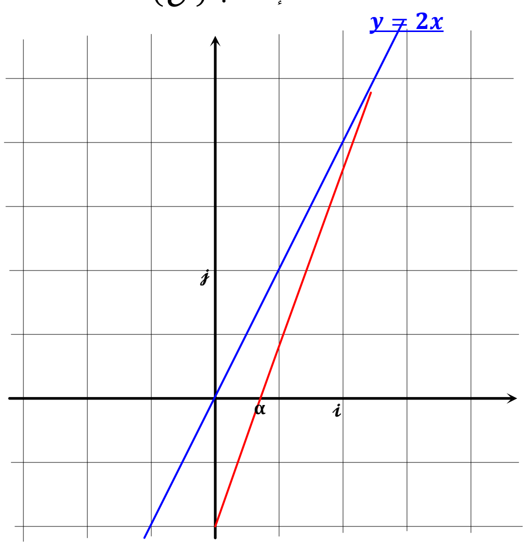
و بالتالي f موجبة قطعا على المجال $]\alpha,1[$

و f سالبة قطعا على المجال $]0,\alpha[$

و f تنعدم في α

■ (I) (1) (د)

إنشاء : $(\mathscr{C})$



■ (II) (1) (أ)

لدينا : $t\to e^{-t^2}$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص على $[0,x]$

إذن فهي تقبل دالة أصلية h على المجال $[0,x]$ بحيث : $h'(x)=e^{-x^2}$

و منه h متصلة و قابلة للإشتقاق على $[0,x]$

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$(\exists\, c\in\,]0,x[)\ :\ \frac{h(x)-h(0)}{x-0}=h'(c)$$

$$\Leftrightarrow\ (\exists\, c\in\,]0,x[)\ :\ \frac{1}{x}\big(h(x)-h(0)\big)=e^{-c^2}$$

$$\Leftrightarrow\ (\exists\, c\in\,]0,x[)\ :\ \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt=e^{-c^2}$$

■ (II) (1) (ب)

لدينا : $0<c<x$ إذن : $-x^2<-c^2<0$

و منه : $e^{-x^2}<e^{-c^2}<1$

باستعمال نتيجة السؤال (1)(أ) نحصل على :

$$(\forall\, x>0)\ :\ \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt<1$$

و من أجل $x=1$ نحصل على : $\int_0^1 e^{-t^2}dt<1$

■ (II) (2) (أ)

لدينا :

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha f(t)dt &= \int_0^\alpha \left(2t-e^{-t^2}\right)dt\\ &= 2\int_0^\alpha t\,dt-\int_0^\alpha e^{-t^2}dt\\ &= \frac{2\alpha^2}{2}-\int_0^\alpha e^{-t^2}dt\\ &= \alpha^2-\int_0^\alpha e^{-t^2}dt\\ &= g(\alpha)\end{aligned}$$

■ (II) (2) (ب)

لدينا : $t\to e^{-t^2}$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ و بالخصوص على $[0,x]$ بحيث : $x>0$

إذن فهي تقبل دالة أصلية h على المجال $[0,x]$ بحيث : $h'(x)=e^{-x^2}$

لدينا g دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+$ لأنها فرق دالتين قابلتين للإشتقاق و هما h و $x\to x^2$.

و لدينا : $g(x)=x^2-h(x)$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\ g'(x) &= 2x-h'(x)\\ &= 2x-e^{-x^2}\\ &= f(x)\end{aligned}$$

■(II)(2)(ج)

لدينا f موجبة على المجال $]\alpha,1[$

و منه : $(\forall x \in]\alpha,1[) \;:\; g'(x)=f(x)>0$.

يعني : g دالة تزايدية قطعا على $]\alpha,1[$.

و منه g تقابل من المجال $]\alpha,1[$ نحو المجال $]g(\alpha),g(1)[$.

و لدينا كذلك f سالبة على المجال $[0,\alpha]$

إذن : $(\forall x \in [0,\alpha]) \;:\; g'(x)=f(x)<0$.

يعني : g دالة تناقصية على المجال $[0,\alpha]$

و بما أن : $\alpha>0$ فإن : $g(\alpha)<g(0)$

أي : $\boxed{g(\alpha)<0}\;(1)$

ومن السؤال(II)(1)(ب) نستنتج أن : $1-\int_1^1 e^{-t^2}\,dt>0$

يعني : $\boxed{g(1)>0}\;(2)$

من (1) و (2) نستنتج أن $0 \in]g(\alpha),g(1)[$

إذن الصفر يمتلك سابقا واحدا β في المجال $]\alpha,1[$ بالتقابل f .

أو بتعبير أنيق : $\boxed{(\exists!\,\beta\in]\alpha,1[) \;;\; f(\beta)=0}$

■(II)(3)(أ)

لدينا حسب السؤال (II)(1)(أ):

$$(\forall\, x>0)\;\;(\exists\, c \in]0,x[) \;:\; \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt=e^{-c^2}$$

و لدينا كذلك : $0<c<x$.

إذن : $e^{-x^2}<e^{-c^2}<1$.

$$\Leftrightarrow\; e^{-x^2}<\frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt<1 \;\;;\;\; x>0$$

$$\Leftrightarrow\; e^{-x^2}<\varphi(x)<1 \;\;;\;\; x>0$$

بما أن : $\lim_{x\to0^+}\left(e^{-x^2}\right)=\lim_{x\to0}1=1$

فإنه بالضرورة : $\lim_{x\to0^+}\varphi(x)=1=\varphi(0)$

و بالتالي : φ دالة متصلة على اليمين في الصفر.

■(II)(3)(ب)

لدينا : $\varphi(x)=\frac{1}{x}\int_0^x \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{e^{-t^2}}_{v}\,dt \;\;;\;\; x>0$

$$=\frac{1}{x}\left([uv]-\int uv'\right)$$

$$=\frac{1}{x}\left(\left[te^{-t^2}\right]_0^x+2\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\right)$$

$$=e^{-x^2}+\frac{2}{x}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$$

■(II)(3)(ج)

نضع : $\psi(x)=\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$

لدينا : $\psi'(x)=x^2e^{-x^2}$

ننطلق من : $\varphi(x)=e^{-x^2}+\frac{2\psi(x)}{x}$

إذن :
$$\varphi'(x)=-2xe^{-x^2}+\frac{2x^3e^{-x^2}-2\psi(x)}{x^2}$$

$$=-2xe^{-x^2}+2xe^{-x^2}-\frac{2}{x^2}\psi(x)$$

$$=\frac{-2}{x^2}\psi(x)$$

$$=\frac{-2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$$

■(II)(3)(د)

انطلاقا من تعبير $\varphi'(x)$ نستنتج أن : $(\forall x>0) \;:\; \varphi'(x)<0$

إذن φ تناقصية على $\mathbb{R}_*^+$.

و بالخصوص φ متصلة و تناقصية على المجال $[0,1]$

ليكن : $x\in[0,1]$ يعني : $0\le x\le1$.

$$\Rightarrow\; \varphi(0)\ge\varphi(x)\ge\varphi(1)$$

$$\Rightarrow\; 1\ge\varphi(x)\ge\int_0^1 e^{-t^2}dt>0$$

إذن : $\varphi(x)\in[0,1]$

و بالتالي : $\varphi([0,1])\subset[0,1]$

■(II)④(أ)

لدينا : $-t^2 \le 0$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-t^2} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 e^{-t^2} \le t^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt \le \int_0^x t^2\,dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt \le \frac{x^3}{3}$$

■(II)④(ب)

لدينا : $0 \le \int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt \le \frac{x^3}{3}$

إذن : $0 \le \left|\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt\right| \le \left|\frac{x^3}{3}\right|$

و منه : $\left|\frac{2}{x^2}\right| \times \left|\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt\right| \le \left|\frac{x^3}{3}\right| \times \left|\frac{2}{x^2}\right|$

و نعلم أن : $|\varphi'(x)| = \left|\frac{2}{x^2}\right| \times \left|\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,dt\right|$

إذن : $|\varphi'(x)| \le \frac{2}{3}|x|$

و بما أن : $0 < x < 1$ فإن : $|x| < 1$

و بالتالي : $\boxed{(\forall x \in]0,1[) \; ; \; |\varphi'(x)| \le \frac{2}{3}}$

■(II)④(ج)

ليكن $x > 0$

ننطلق من الكتابة : $\varphi(x) = x$.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = x$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^x e^{-t^2}\,dt = x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - \int_0^x e^{-t^2}\,dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{g(x) = 0}$$

■(II)⑤(أ)

نستعمل في هذا السؤال البرهان بالترجع

من أجل $n = 0$ لدينا : $0 \le u_0 \le 1$

نفترض أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; 0 \le u_n \le 1$.

$$\Leftrightarrow \quad u_n \in [0,1]$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(u_n) \in [0,1]$$

لأن : $\varphi([0,1]) \subset [0,1]$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le u_{n+1} \le 1$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; 0 \le u_n \le 1}$

■(II)⑤(ب)

لدينا حسب نتائج الأسئلة السابقة :

φ دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

إذن يمكن تطبيق TAF بالنسبة للدالة φ على أي مجال من $\mathbb{R}_+^*$.

لدينا : $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ و $\beta \in \mathbb{R}_+^*$.

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

يوجد عدد حقيقي λ محصور بين β و u_n بحيث :

$$\frac{\varphi(u_n) - \varphi(\beta)}{u_n - \beta} = \varphi'(\lambda)$$

$$\Leftrightarrow \quad |\varphi(u_n) - \varphi(\beta)| = |\varphi'(\lambda)||u_n - \beta|$$

بما أن : $g(\beta) = 0$ فإنه حسب (II)④(ج) $\varphi(\beta) = \beta$

إذن : $|u_{n+1} - \beta| < |\varphi'(\lambda)| \cdot |u_n - \beta|$

لدينا حسب السؤال(II)④(ب)

$$(\forall x \in]0,1[) \; ; \; |\varphi'(x)| \le \frac{2}{3}$$

و لدينا $\lambda \in]0,1[$ لأن β و u_n عنصرين من $]0,1[$

إذن : $|\varphi'(\lambda)| < \frac{2}{3}$

و منه : $|\varphi'(\lambda)| \cdot |u_n - \beta| < \frac{2}{3}|u_n - \beta|$

و بالتالي : $\boxed{|u_{n+1} - \beta| < \frac{2}{3}|u_n - \beta|}$

من أجل $(n-1)$ نحصل على :

$$|u_n-\beta| \le \frac{2}{3}|u_{n-1}-\beta|$$
$$\le \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}|u_{n-2}-\beta|$$
$$\le \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}|u_{n-3}-\beta|$$
$$\le \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}|u_{n-4}-\beta|$$
$$\vdots$$
$$\boxed{\le \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0-\beta|}$$

و بما أن : $0<\beta<1$

فإن : $\frac{-1}{3}<\frac{2}{3}-\beta<\frac{2}{3}$

إذن : $-1<\frac{2}{3}-\beta<1$

أي : $|u_0-\beta|<1$

و منه : $\left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0-\beta| < \left(\frac{2}{3}\right)^n$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\beta| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n}$

■(II)5ج

بما أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\beta| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$

و $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ متتالية هندسية تؤول إلى الصفر لأن أساسها عدد موجب أصغر من 1

إذن بالضرورة نستنتج أن : $\lim\limits_{n\infty}(u_n-\beta)=0$

يعني : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)=\beta$

و بالتالي : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و تؤول إلى β .

■ و الحمد لله رب العالمين ■