استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (3,0 ن)

① ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

(أ) بين أنه إذا كان n عددا فرديا فإن $n^2 \equiv 1[8]$. — 0,50 ن

(ب) بين أنه إذا كان n عددا زوجيا فإن $n^2 \equiv 0[8]$ أو $n^2 \equiv 4[8]$. — 0,50 ن

② ليكن a و b و c أعداد صحيحة طبيعية فردية .

(أ) بين أن $a^2 + b^2 + c^2$ ليس مربعا كاملا. — 0,50 ن

(ب) بين أن : $2(ab + bc + ac) \equiv 6[8]$. — 0,50 ن

(لاحظ أن : $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$)

(ج) استنتج أن : $2(ab + bc + ac)$ ليس مربعا كاملا . — 0,50 ن

(د) بين أن $(ab + bc + ac)$ ليس مربعا كاملا. — 0,50 ن

التمرين الثاني : (3,0 ن)

لتكن E مجموعة المصفوفات التي تكتب على شكل : $M_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$

و F مجموعة المصفوفات المعرفة بما يلي : $N_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}$

① (أ) بين أن : $M_a \times M_b = M_{ab}$; $(\forall (a,b) \epsilon \mathbb{R}^{*2})$. — 0,50 ن

(ب) ليكن φ التطبيق المعرف من $\mathbb{R}^*$ نحو E بما يلي : $\varphi(a) = M_a$. — 0,50 ن

بين أن : φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

(ج) استنتج البنية الجبرية لـ $(E,\times)$. — 0,50 ن

② (أ) بين أن $N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}}$; $(\forall (a,b) \epsilon \mathbb{R}^{*2})$. — 0,50 ن

(ب) نضع $G = E \cup F$ ، بين أن : $(G,\times)$ زمرة . — 0,50 ن

(ج) هل $(G,\times)$ زمرة تبادلية ؟ — 0,50 ن

التمرين الثالث : (3,5 ن)

0,75 ن ① حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2+z+1=0$.

② لكل عدد عقدي z حيث : $z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ نضع : $z'=\dfrac{1}{z^2+z+1}$

مع : $\boxed{-\pi\le\theta\le\pi}$ و $\boxed{\theta\ne\dfrac{2\pi}{3}}$ و $\boxed{\theta\ne\dfrac{-2\pi}{3}}$

0,75 ن أ) تحقق أن : $1+z+z^2=z(1+z+\bar{z})$.

0,75 ن ب) احسب معيار و عمدة z' بدلالة θ .

0,75 ن ج) نضع : $z'=x+iy$ حيث $(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2$.

بين أن : $x^2+y^2=(1-2x)^2$.

0,50 ن د) استنتج أن M ذات اللحق z' تنتمي إلى هدلول يتم تحديد مركزه و رأسيه و مقاربيه .

التمرين الرابع : (10 ن)

(I) نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $\boxed{f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}}$

0,50 ن ① أحسب نهايات f عند محدات مجموعة تعريفها $\mathcal{D}_f$.

0,50 ن ② أدرس تغيرات الدالة f .

③ ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم.

0,50 ن أ) أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C})$.

0,25 ن ب) أنشىء $(\mathscr{C})$.

(II) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1}={u_n}^2f(u_n)=u_ne^{-u_n} & ; (\forall n\epsilon\mathbb{N}) \\ u_0=1 \end{cases}$

0,25 ن ① بين أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ e^x\ge x+1$.

0,25 ن ② استنتج أن : $(\forall x>0)\ ;\ x^2f(x)\le\dfrac{x}{x+1}$

0,50 ن ③ أ) باستعمال البرهان بالترجع بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ 0<u_n\le\dfrac{1}{n+1}$

0,75 ن ب) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

④ نضع من أجل كل عنصر n من $\mathbb{N}^*$: $\boxed{v_n=\sum_{k=0}^{n-1}u_k}$

0,75 ن أ) بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ v_n=\ln\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$

0,50 ن ب) حدد نهاية المتتالية (v_n) .

(III) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$F(0) = 2\ln 2 \quad \text{و} \quad (\forall x > 0)\ ;\ F(x) = \int_{x^2}^{4x^2} f(t)\,dt$$

ن 0,25	① ⓐ تحقق أن : $(\forall x > 0)\ ;\ \int_{x^2}^{4x^2} \frac{1}{t}\,dt = 2\ln 2$
ن 0,50	ⓑ باستعمال نتيجة السؤال ① من الجزء الثاني بين أن : $(\forall t > 0)\ ;\ -t < e^{-t} - 1 \leq 0$.
ن 0,50	② ⓐ بين أن : $(\forall x > 0)\ ;\ -3x^2 \leq F(x) - 2\ln 2 \leq 0$.
ن 0,25	ⓑ استنتج أن F متصلة و قابلة للإشتقاق على اليمين في 0.
ن 0,25	③ ⓐ بين أن $(\forall t \geq 1)\ ;\ f(t) < e^{-t}$.
ن 0,50	ⓑ استنتج النهاية التالية : $\lim_{x\to+\infty} F(x)$
ن 0,75	④ ⓐ بين أن F قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و احسب $F'(x)$.
ن 0,50	ⓑ اعط جدول تغيرات الدالة F .
ن 0,50	ⓒ أنشىء $(\mathscr{C}_F)$ في معلم متعامد ممنظم .
	⑤ لتكن G الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $G(x) = \int_{x}^{4x} e^{-t}\ln t\,dt$
ن 0,50	ⓐ بين أن : $(\forall x > 0)\ ;\ G(x) = F(\sqrt{x}) - e^{-4x}ln(4x) + e^{-x}ln(x)$.
ن 0,50	ⓑ أحسب النهاية التالية : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (e^{-x} - e^{-4x})\ln x$
ن 0,25	ⓒ استنتج : $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} G(x)$