

النهايات و الاتصال

التمرين رقم : 03

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\pi, \pi[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt[3]{4x^3+1} - \sqrt[3]{3x^3+1}}{2x^2 \sin x}, & x \in]0, \pi[\\ f(x) = \frac{1}{6} + \frac{x \sqrt[5]{4-x}}{2 + \sin \frac{1}{x}}, & x \in]-\pi, 0[\\ f(0) = \frac{1}{6} \end{cases}$$

بين أن الدالة f متصلة على المجال $]-\pi, \pi[$

التمرين رقم : 04

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \left(\frac{1 - \sqrt[3]{x}}{3 - \sqrt[3]{x}} \right)^3 \quad \text{و لتكن } (E) \text{ المعادلة التالية :}$$

$$f(x) + 125 = 0$$

1 - حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2 - أدرس إشارة $f(x)$ على D_f (يمكن وضع $\sqrt[3]{x} = t$)

3 - استنتج أنه إذا كان x حل للمعادلة (E) فإن $x \in]1, 27[$

4 - حدد مجموعة حلول المعادلة (E)

التمرين رقم : 05

1 - بين أن لكل x و y من $]0, +\infty[$:

$$\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} = x^{\frac{2}{3}} \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

2 - استنتج أن :

$$\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = \sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} \right)^3}$$

3 - استنتج أنه لكل a و b من $]0, +\infty[$:

$$a + b + \sqrt[3]{ab} \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \right) + 2 \sqrt{\left(a + \sqrt[3]{a^2 b} \right) \left(b + \sqrt[3]{b^2 a} \right)} = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \right)^3$$

التمرين رقم 01

لتكن f دالة عددية معرفة على R^+ وتحقق الشروط التالية:

(I) f متصلة على R^+

(II) $(\forall x \in R^+): f(x) > 0$

(III) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \delta < 1$

1 - افترض أن: $(\forall x \in R_+^*): f(x) \leq x$

بين أن: $f(0) \leq 0$

2 - استنتج أنه يوجد عدد حقيقي موجب قطعاً α

بحيث: $f(\alpha) > \alpha$

3 - بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -\infty$

4 - استنتج أنه يوجد عدد حقيقي موجب قطعاً β

بحيث: $f(\beta) < \beta$

التمرين رقم : 02

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1/x)}{\sqrt[3]{1+2x}} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{6 \arctan x - \pi}{3x^2 - \sqrt{3}x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}} \sqrt[12]{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt[3]{x+1} - 15\sqrt[5]{x^3}}{3\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2 \arctan x)}{\arctan(\sin 2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[4]{x+1}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arctan \left[\frac{(\cos 2x - \cos x) \sin x}{\sqrt{3}(\tan x - \sin x)} \right]$$

التمرين رقم: 06

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x\sqrt{3-x}}{2 + \sin \frac{1}{x}} \cos \left(1 - \sin \frac{1}{x} \right) \quad ; \quad x < 0 \\ f(x) = \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)^3}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 2} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \right) \quad ; \quad x > 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

1 - بين أن : $(\forall x \in]-1, 0[) \quad \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| \leq 2|x|$

2 - أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (يمكن وضع $y = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$)

3 - أدرس اتصال الدالة f في النقطة 0

التمرين رقم: 07

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R بما يلي:

$$f(x) = \text{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x)$$

1 - بين أن : $(\forall x \in R) \quad 0 < f(x) < \frac{\pi}{2}$

2 - أثبت أن:

$$(\forall x \in R) \quad 1 - \tan^2(f(x)) = 2x \tan(f(x))$$

3 - استنتج أن لكل x من R : $\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2f(x)\right) = x$

4 - استنتج أن : $(\forall x \in R) \quad f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \text{Arctan} x$

4 - بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل على الأقل حلا ω في المجال $[0, 1]$

5 - بين أن : $\text{Arctan} x + \text{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ لكل x من R_+^*

6 - استنتج أن : $\text{Arctan} \frac{1}{\omega} = 2\omega$

التمرين رقم: 08

1 - لتكن f دالة عددية متصلة على قطعة $[a, b]$ حيث:

$$1 + f(a) < a^3 \quad \text{و} \quad 1 + f(b) < ab^2$$

بين أنه يوجد على الأقل عدد حقيقي β من المجال $[a, b]$ بحيث:

$$f(\beta) = a\beta^2 - 1$$

2 - لتكن f دالة عددية متصلة على المجال $I = [2004, 3000]$ بحيث:

$$f(2004) < 6,012 \cdot 10^6 \quad \text{و} \quad f(3000) > 9 \cdot 10^6$$

بين أن : $(\exists \alpha \in I) : f(x) = 3000x$

التمرين رقم: 09

أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{-x^3 + 1} - \sqrt[3]{x^2 - 1}}{x} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \tan \left(\frac{96\pi}{11} \left(\frac{\sqrt[4]{x+14} - \sqrt[3]{10-x}}{x-2} \right) \right) \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1} + 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[4]{1-x}}{x} \right) \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \left(\frac{\pi}{3} \sqrt[12]{x} \left(\frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}} \right) \right) \quad \text{و}$$

التمرين رقم: 10

لتكن f الدالة العددية المعرفة على R^+ كما يلي:

$$f(x) = \text{Arctan} \left(\frac{x-1}{2x+1} \right) + \text{Arctan} \left(\frac{x}{x+1} \right) - \frac{\pi}{4}$$

1 - بين أن : $(\forall x \in R^+) \quad 0 \leq \text{Arctan} \left(\frac{x}{x+1} \right) < \frac{\pi}{4}$

2 - استنتج أنه إذا كان x حل للمعادلة $f(x) = 0$ فإن:

$$0 < \text{Arctan} \left(\frac{x-1}{2x+1} \right) \leq \frac{\pi}{4}$$

3 - استنتج أن : $(f(x) = 0) \Rightarrow x > 1$

4 - بين أن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حل في المجال $]1, +\infty[$

5 - حل في R^+ المعادلة : $f(x) = 0$

التمرين رقم: 11

1 - لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}$$

2 - حل في المجال $[-1, +\infty[$ المعادلة :

$$\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x} = 0$$

3 - استنتج أن : $D_f =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$

4 - بين أن:

$$(\forall x \in D_f) : \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt[12]{1+x} (1 + \sqrt[12]{1+x})}$$

5 - أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

التمرين رقم 12:

لتكن f و g دالتين معرفتين و متصلتين على مجال $[a, b]$ بحيث:

$$f(x) \leq g(x) \text{ لكل } x \text{ من } [a, b].$$

α و β عددين حقيقيين من المجال $[a, b]$ يحققان ما يلي:

$$f(\alpha) = \alpha \text{ و } g(\beta) = \beta$$

بين أن المعادلة التالية تقبل على الأقل حلا واحدا في المجال $[a, b]$:

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x) = x$$

حيث λ عدد حقيقي من المجال $[1, 0]$

التمرين رقم 13:

لتكن f الدالة العددية المعرفة

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-7}{2} + \frac{1 - \sqrt[3]{-(2+x)}}{2} & ; x < -2 \\ f(x) = x^3 - 3x - 1 & ; x \geq -2 \end{cases}$$

1 - حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2 - أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3 - أدرس اتصال الدالة f على \mathbb{R}

4 - بين أن f تقابل من المجال $[-\infty, -2[$ نحو مجال J يجب تحديده

5 - حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

6 - حل في المجال $[-\pi, \pi]$ المعادلة: $\cos 3y = \frac{1}{2}$

7 - تحقق أن:

$$(\forall y \in \mathbb{R}) \quad \cos(3y) + 3 \cos y = 4 \cos^3 y$$

8 - ليكن g قصور الدالة f على المجال $[-2, +\infty[$

9 - أدرس رتبة الدالة g على المجال $[-2, +\infty[$

10 - بين المعادلة $g(x) = 0$ تقبل بالضبط 3 حلول α و β و λ من

المجال $[-2, 2]$

11 - اوضح $x = 2 \cos y$ بين أن: المعادلة $g(x) = 0$ تكافئ

$$\cos 3y = \frac{1}{2}$$

12 - استنتج أن: قيم α و β و λ هي بالضبط $2 \cos \frac{\pi}{9}$ و

$$2 \cos \frac{7\pi}{9} \text{ و } 2 \cos \frac{5\pi}{9}$$

التمرين رقم 14:

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي:

$$f(x) = x^2 + x - 2x\sqrt{x} + 2 \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

1 - بين أن f تقابل من المجال $[1, +\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده

2 - بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha < 1$ بحيث:

$$\alpha^2 + \alpha = 2\alpha\sqrt{\alpha} + 3$$

$$3 - \text{بين أن: } f^{-1}(x) = \frac{(1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{x} - 2})^2}{4} \quad (\forall x \geq 2)$$

4 - استنتج قيمة العدد α

التمرين رقم 15:

ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعاً و f دالة عددية معرفة ومتصلة على المجال $[0, 1]$

و لتكن h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$h(x) = f(x) - \frac{af(0) + bf(1)}{a+b}$$

1 - بين أن الدالة h متصلة على المجال $[0, 1]$

2 - تحقق أن: $h(0) = \frac{b[f(0) - f(1)]}{a+b}$ و

$$h(1) = \frac{a[f(1) - f(0)]}{a+b}$$

3 - نفترض أن: $f(0) \neq f(1)$

بين أنه يوجد على الأقل عدد حقيقي $\beta \in]0, 1[$ بحيث:

$$f(\beta) = \frac{af(0) + bf(1)}{a+b}$$

التمرين رقم 16:

تأطير حل المعادلة $f(x) = 0$ بطريقة التفرع الثنائي (La méthode de la dichotomie)

f دالة عددية معرفة على \mathbb{R} بما يلي: $f(x) = x^2 - 3x + 1$

1 - بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين في \mathbb{R}

2 - بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α من المجال $]0, 1[$

3 - أحسب ما يلي: $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $f\left(\frac{1}{4}\right)$ و $f\left(\frac{3}{8}\right)$ و $f\left(\frac{7}{16}\right)$

4 - باستعمال طريقة التفرع الثنائي بين أن:

$$0,375 < \alpha < 0,4375$$

(تأطير للعدد α سعته 625×10^{-3})