التمرين الأول

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $n \in \mathbb{N} \quad : \quad U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + n - 1$ و $U_0 = 1$

1) أ- بين أن $U_n \geq 0$ لكل عدد طبيعي $n \geq 3$

ب- بين أنه إذا كان $n \geq 4$ فإن $U_n \geq n - 2$ ماذا يمكن أن تستنتج ؟

2) نضع $V_n = 4U_n - 8n + 24$

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية محددا أشاشها

ب- أحسب U_n بدلالة n

التمرين الثاني

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = \frac{3}{\sqrt{6 - U_n^2}}$

1) أ- بين أن $0 \leq U_n < \sqrt{3}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

2) نضع $V_n = \frac{U_n^2}{3 - U_n^2}$ لكل عدد طبيعي n

بين أن المتتالية $(V_n)_n$ حسابية و حدد U_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \to +\infty} U_n$

التمرين الثالث

لتكن $(U_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{3k - 2}{5^k}$

1) تحقق أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

2) أ- بين أن $U_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}U_n + \frac{3}{20}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \quad : \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

ب- استنتج أن $(U_n)_n$ مكبورة

3) بين أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الرابع

لتكن $(U_n)_n$ متتالية حسابية أساسها r . نضع $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_{n-1}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ليكن m و n عددين طبيعيين مختلفين .

1) بين أن $(m + n - 1)r = -2U_0 \iff S_m = S_n$

2) استنتج أن : $S_m = S_n \implies S_{m+n} = 0$

التمرين الخامس

أحسب نهايات المتتاليات التالية : $U_n=5^n-3^n$ ، $U_n=\dfrac{3^n-1}{8^n-2}$ ، $U_n=\dfrac{\cos(n)}{n+1}$ ،

$U_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1}$ ، $U_n=\dfrac{(-1)^n+2n}{2(-1)^n+5}$ ، $U_n=n+3\sin(n)$ ، $U_n=\dfrac{n!}{2^n}$ ،

$U_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ ، $U_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{n}{n^2+k}$ ، $U_n=\dfrac{3^n+(-2)^{n+1}}{3^n+(-2)^n}$ ، $U_n=\dfrac{n+2(-1)^n}{2n+(-1)^n}$

التمرين السادس

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f_n(x)=x^3+nx-1$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

1) ادرس رتابة الدالة f_n

2) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0,1[$

3) أ- بين أن $f_{n+1}(x)>f_n(x)$: $(\forall x\in\mathbb{R}^+)$

ب- بين أن المتتالية $(a_n)_n$ تناقصية و استنتج أن المتتالية $(a_n)_n$ متقاربة

4) أحسب $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$ و استنتج أن $0\le a_n\le\dfrac{1}{n}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ و حدد نهاية المتتالية $(a_n)_n$

التمرين السابع

I) ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و n عددا طبيعيا بحيث $n\ge 2$

1) نفترض أن $a>1$. بين أن $\sqrt[n]{a}-1\le\dfrac{a-1}{n}$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}$

2) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}$ من أجل $0<a<1$

II) نعتبر الدالة f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=x^n-1+\arctan x$

1) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا a_n

2) بين أن المتتالية $(a_n)_{n>0}$ محدودة

3) أدرس إشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ و أدرس رتابة المتتالية $(a_n)_{n>0}$

4) حدد إشارة $f\left(\sqrt[n]{1-\dfrac{\pi}{4}}\right)$ و بين أن المتتالية $(a_n)_{n>0}$ متقاربة وحدد نهايتها

التمرين الثامن

بين أن المتتاليتين $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متحاذيتين :

$u_n=2^{n+1}\sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$ و $v_n=2^{n+1}\tan\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$ حيث θ من المجال $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$