~ الثانية علوم رياضية ~

سلسلة المتتاليات

التمرين 1

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{1}{4x^2+4}$

ونعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

1. أ. أدرس تغيرات f على $\mathbb{R}^+$

ب. بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا $\alpha\in\left]\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{2}\right[$

ج. بين أن : $\left(\forall (x,y)\in[0,1]^2\right):|f(x)-f(y)|\le\dfrac{1}{2}|x-y|$

2. بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}):0<u_n\le\dfrac{1}{2}$

3. أ. بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}):|u_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$

ب. استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب نهايتها

4. نضع $v_n=u_{2n}$ و $w_n=u_{2n+1}$

أ. بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}):w_n<\alpha<v_n$

ب. أدرس رتابة (v_n) و (w_n)

5. أ. بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}):v_{n+1}-w_{n+1}\le\dfrac{1}{4}(v_n-w_n)$

ب. بين أن (v_n) و (w_n)متحاديتان و حدد نهايتهما المشتركة

التمرين 2

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f_n(x)=3x^n-x-1$

1. أ. بين أن f_n تزايدية على $\left[\sqrt[n-1]{\dfrac{1}{3n}},+\infty\right[$ و تناقصية على $\left[0,\sqrt[n-1]{\dfrac{1}{3n}}\right]$

ب. ضع جدول تغيرات f_n و استنتج إشارتها

2. بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا u_n في المجال $[0,+\infty[$

3. أحسب $f_n(1)$ و استنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*):0<u_n<1$

4. أ. بين أن : $(\forall x\in]0,1[):f_{n+1}(x)<f_n(x)$

ب. استنتج أن المتتالية (u_n) تزايدية

ج. بين أن المتتالية (u_n) متقاربة

5. نضع $\lim u_n = l$

أ. بين أن : $0 \le l \le 1$

ب. بين أن : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right) : u_n \le l$

ج. بين أن : $l = 1$

つづく