مدة الإنجــاز: 4 ساعات	مادة الرياضيات	
الثانية باك ع-رياضية	الإمتحان التجريبي الثاني	Inisse
2013/04/24	دورة أبريل 2013	Groupe scolaire

التمرين الأول: (4 ن) A - نعتبر المجموعة $G=\mathbb{R}-\{\sqrt{3}\}$. لكل a و b من G نضع : $a*b=a+b-\dfrac{ab}{\sqrt{3}}$.

1) تحقق من أن $\forall(a,b)\in G^2\ a*b=\sqrt{3}-\sqrt{3}(\dfrac{a}{\sqrt{3}}-1)(\dfrac{b}{\sqrt{3}}-1)$ 0,5

2) بين أن $(G,*)$ زمرة تبادلية. 1

B نعتبر المجموعة $E=\left\{M(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}-a & a\\ a & 2\sqrt{3}-a\end{pmatrix}/a\in G\right\}$, و المصفوفتين $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

1) أ- تحقق من أن $J^2=-2J$ و أن $\forall a\in G, M(a)=I+\dfrac{a}{2\sqrt{3}}J$ 0,5

ب- بين أن المجموعة E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$. 0,5

2) نعتبر التطبيق $f:G\to E$
$a\mapsto M(a)$

أ- بين أن f تشاكل تقابلي من $(G,*)$ نحو $(E,\times)$. 1

ب- استنتج بنية $(E,\times)$. 0,5

التمرين الثاني(3.5 ن) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية (E) : $z^2-az+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=0$ حيث a عدد عقدي. وليكن z_0 و z_1 حلي المعادلة (E).

1) بين أن $\arg z_0+\arg z_1\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ وأن $|z_0||z_1|=1$ 0,25

2) أ- نضع $z_0=\cos\theta+i\sin\theta$ (θ عدد حقيقي) بين أن: $a=2\cos(\theta-\dfrac{\pi}{6})e^{i\frac{\pi}{6}}$ 0,5

ب- استنتج أنه إذا كان $z_0=i$ فإن $1+ia-a^2-ia^3+a^4+ia^5=0$ 0,5

3) نفترض أن $z_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

أ- حدد العدد z_1 على شكليه المثلثي والجبري ثم استنتج قيمتي $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$. 0,5

ب- حدد العدد a على شكليه المثلثي والجبري 0,5

4) نعتبر ،في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، النقط M_0 و A و M_1 التي ألحاقها على التوالي هي: a و z_0 و z_1 حيث $z_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

ليكن التحويل R الذي يحول كل نقطة $M(z)$ إلى $M'(z')$ بحيث : $z'=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)z$

أ- حدد طبيعة والعناصر المميزة للتحويل R. 0,25

ب- بين أن $R(M_0)=M_1$ ثم استنتج طبيعة OM_0AM_1 0,5

ج- استنتج عمدة ومعيار العدد العقدي a. 0,5

التمرين الثالث: (2,5 ن) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $x^4+781=3y^4$ (F)

1) أ- بين أن لكل x من $\mathbb{Z}$: $x^4\equiv 1[5]$ أو $x^4\equiv 0[5]$ 0,5

ب- بين أن لكل x من $\mathbb{Z}$. $x^4+781\equiv 2[5]$ أو $x^4+781\equiv 1[5]$ 0,5

ج- استنتج مجموعة حلول المعادلة (F). 0,75

2)هل يوجد عددين صحيحين طبيعيين x و y بحيث $\overline{10000}_{(x)}+\overline{781}_{(10)}=\overline{30000}_{(y)}$ ؟ 0,75

مسألة (10 ن)

A - نعتبر الدالة f المعرفة على $D =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = (x+1)\ln(1+\frac{1}{x}) & x \in D-\{-1\} \\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1- أ- احسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. | 0,25

ب- بين أن الدالة f متصلة في -1 على اليسار . | 0,25

ج- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في -1 ثم أعط تأويلا هندسيا لذلك . | 0,50

2 - أ- بين أن : $(\forall t \in]-1,+\infty[)\quad \frac{t}{1+t} \le \ln(1+t) \le t$ | 0,50

ب- استنتج أن : $(\forall x \in]0,+\infty[)\quad 1 < f(x) < \frac{x+1}{x}$ | 0,50

وأن: $(\forall x \in]-\infty,-1[)\quad \frac{x+1}{x} < f(x) < 1$

ج- احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ثم استنتج الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) | 0,50

3- ادرس تغيرات الدالة f . | 0,50

4 -أنشىء المنحنى (C_f) . | 0,50

5- ليكن λ عددا حقيقيا بحيث $0 < \lambda < 1$ و $A(\lambda)$ مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتهما $x=1$ و $x=\lambda$.
أحسب $A(\lambda)$ بدلالة λ . | 0,50

B- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $I =]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = e^{(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})}$

1- أحسب النهايات عند محدات مجموعة تعريف الدالة g | 0,50

2- أ- احسب $g'(x)$ $(\forall x \in]0,+\infty[)$. | 0,50

ب- ضع جدول تغيرات الدالة g . | 0,50

3 - أ -بين أن : $(\forall x \in]0,+\infty[)\quad e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} < e$ | 0,50

ب- استنتج أن : $(\forall x \in]0,+\infty[)\quad e < g(x) < e + \frac{e}{x}$ | 0,50

4- نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفتين بما يلي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \begin{cases} u_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} \\ v_n = (1+\frac{1}{n})^n \end{cases}$

أ- بين أن : | 0,25

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \begin{cases} \ln u_n = f(n) \\ \ln v_n = f(-1-n) \end{cases}$$

ب - بين أن : $v_n < e < u_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ | 0,50

ج - بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتاليتان متحاديتان وأحسب نهايتهما . | 0,50

C- نعتبر الدالة F المعرفة على $]1,+\infty[$ بمايلي : $F(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x g(t)dt$

1- بين أن : $(\forall x > 1)\quad F(x) - g(x) \ge 0$ | 0,50

2- أحسب $\lim_{x\to 1^+} F(x)$ | 0,25

3 - أ- بين أن : $(\forall x > 1)\quad g(x) \le F(x) \le e + \frac{e\ln x}{x-1}$ | 0,50

ب- أحسب $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ | 0,25

4- أحسب : $F'(x)$ $(\forall x > 1)$ وأعط جدول تغيرات F | 0,75