تصحيح الفرض المحروس رقم ②
الأسدس II

التمرين I :

$(E) : m^2Z^2 + m^3Z + 1 - im^2 = 0$

① أ- من أجل $m = -1$

$(E) : z^2 - z + 1 - i = 0$

$\Delta = 1 - 4(1-i) = -3 + 4i$

$\Delta = (2i+1)^2$

ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E)

$z_1 = \frac{1 - (2i+1)}{2} = -i$

$z_2 = \frac{1 + (2i+1)}{2} = 1 + i$

ومنه: $S = \{-i, 1+i\}$

ب- لنحدد قيم m التي يكون من أجلها $u = 1+i$ حلا للمعادلة (E)

$\left(u = 1+i \text{ حل المعادلة } (E)\right) \Leftrightarrow (E') : (1+i)m^3 + im^2 + 1 = 0$

لدينا: $m = -1$ حل للمعادلة (E')

ومنه: $(E') \Leftrightarrow (m+1)\left((1+i)m^2 - m + 1\right) = 0$

لنحل المعادلة: $(1+i)m^2 - m + 1 = 0$

$\Delta = -3 - 4i = (2i-1)^2$

ومنه: $m = \frac{1 - (2i-1)}{2(1+i)} = -i$

$m = \frac{1 + (2i-1)}{2(1+i)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

وعليه قيم m التي من أجلها $u = 1+i$ حل للمعادلة (E) هي.

$m \in \left\{-1, -i, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$

في حالة $m = -1$ $\left((E) \text{ حلا المعادلة } u' \text{ و } u\right)$

$u = 1+i$ و $u' = -i$

في حالة $m = -i$

$(E) \Leftrightarrow -z^2 + iz + 1 + i = 0$

$u_2 = -i - u_1 = -1$

ومنه:

$u = 1+i$ و $u' = -1$

في حالة $m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$(E) \Leftrightarrow \frac{1}{2}iz^2 + \frac{1}{4}(1+i)z + \frac{3}{2} = 0$

$u' = \frac{i}{4} + \frac{1}{4} - 1 - i = -\frac{3}{4}(i+1)$

وعليه:

$u = 1+i$ و $u' = -\frac{3}{4}(i+1)$

② أ- لنتحقق أن مميز المعادلة (E) يكتب على الشكل:

$\Delta = m^2(m^2+2i)^2$

$\Delta = m^6 - 4(1 - im^2)m^2$

$\Delta = m^2(m^4 - 4 + 4im^2)$

ومنه: $\Delta = m^2(m^2 + 2i)^2$

ب- ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E)

$z_1 = \frac{-m^3 - m(m^2+2i)}{2m^2} = -m - \frac{i}{m}$

$z_2 = \frac{-m^3 + m(m^2+2i)}{2m^2} = \frac{i}{m}$

③ أ- $Z = \frac{m-a}{m-b} = \frac{m + m + \frac{i}{m}}{m - \frac{i}{m}} = \frac{2m^2 + i}{m^2 - i}$

$= \frac{2(m^2 - i) + 3i}{m^2 - i} = 2 + \frac{3i}{m^2 - i}$

$Z = \bar{Z} \Leftrightarrow 2 + \frac{3i}{m^2 - i} = 2 - \frac{3i}{\bar{m}^2 + i}$

$\Leftrightarrow \bar{m}^2 = -m^2$

$\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(m^2) = 0$

ومنه: $m^2 \in i\mathbb{R}$

إذن: $\arg(m^2) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ أو $\arg(m^2) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

$2\arg(m) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ أو $2\arg(m) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

وعليه:

$\arg(m) \equiv \frac{\pi}{4}\,[\pi]$ أو $\arg(m) \equiv -\frac{\pi}{4}\,[\pi]$

ب-

$\left(A \text{ و } B \text{ و } M \text{ نقط مستقيمية}\right) \Leftrightarrow \frac{m-a}{m-b} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow Z = \bar{Z}$

$\Leftrightarrow \arg(m) \equiv \frac{\pi}{4}\,[\pi]$ أو $\arg(m) \equiv -\frac{\pi}{4}\,[\pi]$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(m) = \mathrm{Im}(m)$ أو $\mathrm{Re}(m) = -\mathrm{Im}(m)$

ولدينا :

$$\left|\frac{b'-a'}{b-z_I}\right| = |2i| = 2$$

ومنه ،

$$|b'-a'| = 2|b-z_I|$$

أي ،

$$\boxed{A'B' = 2BI}$$

التمرين II :

① . إذا كان n زوجي

$(\exists h\in\mathbb{Z}) / n = 2h \Rightarrow n^4 = 16h^4$

إذن :

$$n^4 \equiv 0\,[16] \quad (1)$$

إذا كان n فردي

$(\exists h'\in\mathbb{Z}) / n = 2h'+1 \Rightarrow n^4 = (2h+1)^2(2h+1)^2$

$\Rightarrow n^4 = (4h^2+1+4h)^2$

$\Rightarrow n^4 = 16h^4 + 8h^2(1+4h) + (1+4h)^2$

$\Rightarrow n^4 = 16h^4 + 8h^2 + 32h^3 + 1 + 16h^2 + 8h$

$\Rightarrow n^4 = 16(h^4+h^2+2h^3) + 8h(h+1) + 1$

لدينا ،

$$\begin{cases} 16(h^4+h^2+2h^3) \equiv 0\,[16] \\ 8h(h+1) \equiv 0\,[16] \end{cases}$$

(جداء عددين متتابعين هو عدد زوجي $h(h+1) = 2q\ (q\in\mathbb{Z})$)

إذن :

$$n^4 \equiv 1\,[16] \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أنّ :

$n^4 \equiv 0\,[16]$ أو $n^4 \equiv 1\,[16]$

②

$N = a^4 + b^4 \qquad a\wedge b = 1$

الحالة (1) :

$\begin{cases} a^4 \equiv 0\,[16] \\ b^4 \equiv 1\,[16] \end{cases}$ أو $\begin{cases} a^4 \equiv 1\,[16] \\ b^4 \equiv 0\,[16] \end{cases}$

وعليه ،

$a^4 + b^4 \equiv 1\,[16]$

أي :

$N \equiv 1\,[16]$

الحالة (2)

$\begin{cases} a^4 \equiv 1\,[16] \\ b^4 \equiv 1\,[16] \end{cases}$

وعليه : $a^4 + b^4 \equiv 2\,[16]$

أي :

$N \equiv 2\,[16]$

نستنتج أنّ :

$N \equiv 1\,[16]$ أو $N \equiv 2\,[16]$

نضع $m = x + yi$ (M) $(x, y\in\mathbb{R})$

ومنه : مجموعة النقط $M(m)$ التي تكون من أجلها A و B و M نقط مستقيمية هي اتحاد المستقيمين :

(D_1) : $y = x$

(D_2) $y = -x$

④ . أ -

لدينا R دوران مركزه $B\left(\frac{i}{m}\right)$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$A' = R(A) \Leftrightarrow a' = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(a - \frac{i}{m}\right) + \frac{i}{m}$

$\Leftrightarrow a' = ai + \frac{1}{m} + \frac{i}{m}$

$\Leftrightarrow a' = -im + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{i}{m}$

$\Leftrightarrow \boxed{a' = -im + \frac{i}{m} + \frac{2}{m}}$

$B' = R^{-1}(M) \Leftrightarrow R(B') = M$

$\Leftrightarrow e^{i\frac{\pi}{2}}\left(b' - \frac{i}{m}\right) + \frac{i}{m} = m$

$\Leftrightarrow b' - \frac{i}{m} = -im - \frac{1}{m}$

$\Leftrightarrow \boxed{b' = -im + \frac{i-1}{m}}$

ب -

$M' = R(M) \Leftrightarrow m' - \frac{i}{m} = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(m - \frac{i}{m}\right)$

$\Leftrightarrow m' = mi + \frac{i+1}{m}$

لدينا ،

$$\frac{b'+m'}{2} = \frac{-mi + \frac{i-1}{m} + mi + \frac{i+1}{m}}{2}$$

$$= \frac{2i}{2m} = \frac{i}{m}$$

$= b$

وعليه ، $B(b)$ هي منتصف القطعة $[B'M']$

ج . ليكن I منتصف القطعة $[AM]$ و z_I لاحقتها

$z_I = \frac{m+a}{2} = \frac{-i}{2m}$

$$\frac{b'-a'}{b-z_I} = \frac{-im + \frac{i-1}{m} + im - \frac{i}{m} - \frac{2}{m}}{\frac{i}{m} + \frac{i}{2m}}$$

$$= \frac{-3}{m} \times \frac{2m}{3i}$$

$= 2i$

$(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \arg\left(\frac{b'-a'}{b-z_I}\right)\,[2\pi]$

$\equiv \arg(2i)\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

② $(IB) \perp (A'B')$

③ 1- نضع: $D = p \wedge a$

إذن: (P/N)

$$\begin{cases} D/p \\ D/a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D/N \\ D/a^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D/a^4+b^4 \\ D/a^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D/b^4 \\ D/a^4 \end{cases} \Rightarrow D/a^4 \wedge b^4$$

و $a^4 \wedge b^4 = 1$

وعليه: $D/1$

إذن $D = 1$

وعليه: $\boxed{p \wedge a = 1}$

نضع $d = p \wedge b$

(لأن P/N)

$$\begin{cases} d/p \\ d/b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/N \\ d/a^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a^4+b^4 \\ d/b^4 \end{cases}$$

$\Rightarrow d/a^4 \wedge b^4$ و $a^4 \wedge b^4 = 1$

$\Rightarrow d/1$

أي $d = 1$

وعليه: $\boxed{p \wedge b = 1}$

2- لدينا $p \wedge a = 1$ حسب خاصية Bezout

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 / \alpha a + \beta p = 1$$

أي: $(-\alpha)a - \beta p = -1$

نضع: $-\alpha = c$

ومنه: $(\exists c \in \mathbb{Z})$ $ca \equiv -1 [p]$

لدينا: $P/N \Rightarrow N \equiv 0 [p]$

$\Rightarrow a^4 \equiv -b^4 [p]$

ولدينا: $ac \equiv -1 [p] \Rightarrow (ac)^4 \equiv 1 [p]$

و: $(ac)^4 \equiv -(bc)^4 [p]$

وعليه: $-(bc)^4 \equiv 1 [p]$

ومنه: $(bc)^4 \equiv -1 [p]$

نضع: $bc = x$ وعليه:

$(\exists x \in \mathbb{Z})$ $x^4 \equiv -1 [p]$

ج- ليكن p عدد أولي ومنه: حسب مبرهنة فيرما

$x^p \equiv x [p] \Rightarrow x(x^{p-1} - 1) \equiv 0 [p]$

- نفترض أن $x \equiv 0 [p]$

$x \equiv 0 [p] \Rightarrow x^4 \equiv 0 [p]$

ولدينا $x^4 \equiv -1 [p]$ غير صحيح

إذن p لا يقسم x.

وعليه:

$$\boxed{x^{p-1} \equiv 1 [p]}$$

$\exists! (q, r) \in \mathbb{Z}^2 / p = 8q + r$

$x^4 \equiv -1 [p] \Rightarrow x^8 \equiv 1 [p]$

$\Rightarrow x^{8q+r-1} \equiv x^{r-1} [p]$

$\Rightarrow x^{p-1} \equiv x^{r-1} [p]$

وبالتالي:

$$\boxed{x^{r-1} \equiv 1 [p]}$$

- نبين أن $r = 1$

$0 \leq r < 8$ (باقي القسمة الإقليدية للعدد p على 8)

$r = 0 \Leftarrow$ $p = 8q$ و p أولي إذن $r \neq 0$

$r \notin \{2, 4, 6\}$ لأن p عدد أولي أي p فردي وعليه r فردي

$r = 3 \Leftarrow$ $x^2 \equiv 1 [p] \Rightarrow x^4 \equiv 1 [p]$

ولدينا: $x^4 \equiv -1 [p]$

ومنه: $r \neq 3$

$r = 5 \Leftarrow$ $x^4 \equiv 1 [p]$ و $x^4 \equiv -1 [p]$

إذن: $r \neq 5$.

$r = 7 \Leftarrow$

$x^6 \equiv 1 [p]$ و $x^4 \equiv -1 [p]$

$x^6 \equiv 1 [p]$ و $x^6 \equiv -x^2 [p]$

$x^2 \equiv -1 [p] \Rightarrow x^4 \equiv 1 [p]$ و $x^4 \equiv -1 [p]$

وعليه $r \neq 7$.

$r = 1 \Leftarrow$ $1 \equiv 1 [p]$

إذن:

$$\boxed{r = 1}$$

التمرين III

$f_1(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+1}$

1- أ- لنبين أن $\lim_{x\to0^+} x(\ln x)^3 = 0$

نضع $X = x^{1/3}$ ومنه $x = X^3$

$$\lim_{x\to0^+} x(\ln x)^3 = \lim_{X\to0^+} X^3(\ln(X^3))^3 = \lim_{X\to0^+}(3X\ln(X))^3$$

لدينا $\lim_{X\to0^+} X\ln(X) = 0$

ومنه: $\boxed{\lim_{x\to0^+} x(\ln x)^3 = 0}$

$$\lim_{x\to0^+} f_1(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x} - (\ln x)^3\right) = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(1 - x(\ln x)^3\right)$$

لدينا:

$$\begin{cases} \lim_{x\to0^+} x(\ln x)^3 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to0^+} 1 - x(\ln x)^3 = 1 \\ \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x} = +\infty \end{cases}$$

ومنه: $\boxed{\lim_{x\to0^+} f_1(x) = +\infty}$

ب- $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - (\ln x)^3$

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty}(\ln x)^3 = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} - (\ln x)^3 = -\infty$$

ومنه: $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = -\infty}$

(2) لنبين أن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^3}{x} = 0$

نضع $X = x^{1/3}$ ومنه $x = X^3$

ومنه:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^3}{x} = \lim_{X\to+\infty}\frac{(\ln(X^3))^3}{X^3} = \lim_{X\to+\infty}\left(3\frac{\ln(X)}{X}\right)^3$$

لدينا:

$$\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln(X)}{X} = 0 \Rightarrow \lim_{X\to+\infty}\left(3\frac{\ln(X)}{X}\right)^3 = 0$$

ومنه: $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^3}{x} = 0}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^3}{x}$$

$\{ \lim \ (\ln x)^3$

ومنه: $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_1(x)}{x} = 0$

إذن: (C_1) يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الفواصل

(3) f_1 قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$

$$f_1'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{3(\ln x)^2}{x} = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3(\ln x)^2}{x}\right) < 0 \quad (x\in\mathbb{R}^{+*})$$

ومنه f_1 متناقصة تماما على $\mathbb{R}^{+}$

x	0	$+\infty$
$f_1(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

(4) f_1 متصلة ومتناقصة تماما على $\mathbb{R}^{+*}$

ومنه f_1 تقابل من $\mathbb{R}^{+*}$ نحو $\mathbb{R}$.

و $0\in\mathbb{R}$ إذن المعادلة $f_1(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β_1 على $\mathbb{R}^{+*}$

ولدينا:

$f_1(2) = \frac{1}{2} - (\ln(2))^2 > 0$

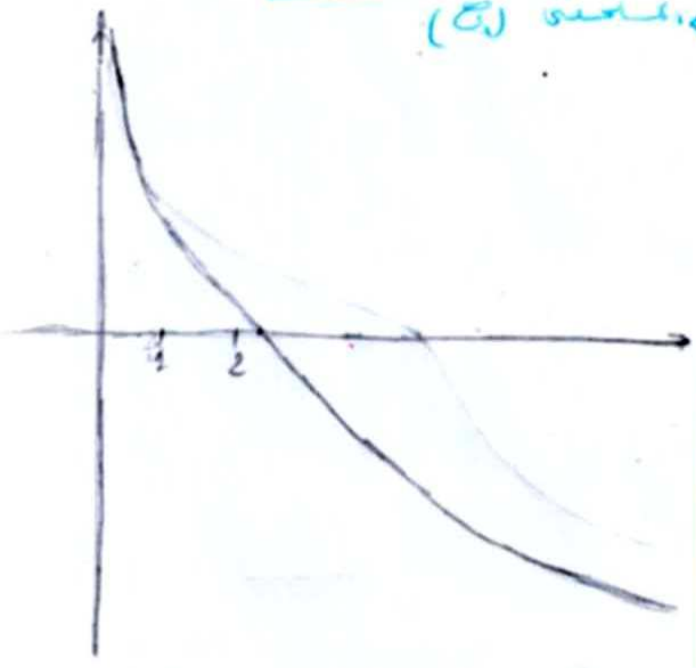
$f_1(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$

ومنه f_1 متناقصة على $\mathbb{R}^{+*}$

$f_1(e) < f_1(\beta_1) < f_1(2)$

وعليه: $\boxed{2 < \beta_1 < e}$

المنحنى (C_1)



II-①

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+1}\right)$$

لدينا :

$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{2n+1} = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\end{cases}$$

و عليه :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty}$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+1} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}\left(1 - x(\ln x)^{2n+1}\right)$$

نضع : $x = X^{2n+1}$ ومنه $X = x^{\frac{1}{2n+1}}$

ومنه :

$$\lim_{x\to0^+} f_n(x) = \lim_{X\to0^+} \frac{1}{X^{2n+1}}\left(1 - \left(X\ln(X^{2n+1})\right)^{2n+1}\right)$$

$$= \lim_{X\to0^+} \frac{1}{X^{2n+1}}\left(1 - \left((2n+1) X \ln(X)\right)^{2n+1}\right)$$

لدينا :

$$\begin{cases}\lim_{X\to0^+} X\ln(X) = 0 \\ \lim_{X\to0^+} \frac{1}{X^{2n+1}} = +\infty\end{cases}$$

ومنه :

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} f_n(x) = +\infty}$$

②

$$f_n'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{(2n+1)(\ln x)^{2n}}{x}$$

$$= -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{(2n+1)(\ln x)^{2n}}{x}\right) < 0$$

لدينا f_n تناقصية و مستمرة و f_n متناقصة على $\mathbb{R}^{+*}$

إذا المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β_n.

ولدينا :

$f_n(1) = 1 > 0$

$f_n(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ $\quad$ f_n تناقصية.

وعليه

$$\boxed{1 < \beta_n < e}$$

③

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{x} - (\ln x)^{2n+3} - \frac{1}{x} + (\ln x)^{2n+1}$$

$$= (\ln(x))^{2n+1}\left(1 - (\ln x)^2\right)$$

$\forall x\in[1,e]$ $\quad 0 < \ln(x) < 1$

$\quad -(\ln(x))^2 > -1$

$1-(\ln x)^2 > 0$ و $(\ln x)^{2n+1} > 0$

ومنه :

$$\boxed{f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0}$$

ب- لدينا : $\forall x\in[1,e]$

$f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

ومنه $\beta_n \in [1,e]$.

$f_{n+1}(\beta_n) > f_n(\beta_n)$ و $f_n(\beta_n) = 0$

ومنه : $f_{n+1}(\beta_n) > 0$ و $f_{n+1}(\beta_{n+1}) = 0$

وعليه :

$f_{n+1}(\beta_n) > f_{n+1}(\beta_{n+1})$

f_{n+1} تناقصية على $[1,e]$ و $(\beta_n,\beta_{n+1}) \in [1,e]^2$

وعليه

$\beta_n < \beta_{n+1}$

إذن : $(\beta_n)_{n\geq1}$ تزايدية تماما

4-أ-

لدينا :

$$f_n(\beta_n) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\beta_n} = \left(\ln(\beta_n)\right)^{2n+1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\beta_n}\right)^{\frac{1}{2n+1}} = \ln(\beta_n)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\ln(\beta_n)\right) = \frac{1}{2n+1}\ln\left(\frac{1}{\beta_n}\right)$$

لدينا :

$$\beta_n < e \Rightarrow \frac{1}{\beta_n} > \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{\beta_n}\right) > \ln(e^{-1})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n+1}\ln\left(\frac{1}{\beta_n}\right) > \frac{-1}{2n+1} \quad \left(\frac{1}{2n+1} > 0\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\ln(\beta_n)\right) > \frac{-1}{2n+1}$$

ولدينا :

$$\frac{-1}{2n+1} > \frac{-1}{2n}$$

وعليه :

$$\boxed{\ln\left(\ln(\beta_n)\right) > \frac{-1}{2n}} \quad (\forall n\in\mathbb{N}^*)$$

ب- لدينا :

$$\ln\left(\ln(\beta_n)\right) > \frac{-1}{2n} \Rightarrow \ln(\beta_n) > e^{-\frac{1}{2n}}$$

ولدينا ،

$$\beta_n < e \Rightarrow \ln(\beta_n) < 1$$

وعليه ،

$$e^{\frac{-1}{2n}} < \ln(\beta_n) < 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{2n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{2n}} = e^0 = 1$$

([illegible])

ومنه :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(\beta_n) = 1$$

أي

$$\lim_{n\to+\infty} \beta_n = e$$