الفضاءات المتجهية الحقيقية

تمرين1

I مجموعة الدوال العددية الفردية المعرفة على $\mathbb{R}$

P مجموعة الدوال العددية الزوجية المعرفة على $\mathbb{R}$

1- بين أن : $(I;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

2- بين أن : $(P;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

الحل

1- لنبين أن : $(I;*;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

الطريقة 1 (تعريف فضاء متجهي حقيقي)

أ- نبين أن : $(I;+)$ زمرة تبادلية

لنبين أن : $(I;+)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+)$

نعتبر $(u;v)\in I^2$ و نبين أن $u-v\in I$

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$$(u-v)(-x)=u(-x)-v(-x)$$
$$=-u(x)+v(x)$$
$$=-(u(x)-v(x))$$
$$\boxed{(u-v)(-x)=-(u-v)(x)}$$

إذن : $\forall(u;v)\in I^2\ u-v\in I$

إذن : $(I;+)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+)$

و بما أن : $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+)$ زمرة تبادلية

فإن : $(I;+)$ زمرة تبادلية

ب- نعتبر : $(u;v)\in I^2$ و $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

ليكن $x\in\mathbb{R}$

1- نبين أن : $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$

$$(\alpha+\beta)u(x)=\alpha u(x)+\beta u(x)$$
$$(\alpha+\beta)u(x)=(\alpha u+\beta u)(x)$$

إذن : $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$

2- نبين أن : $(\alpha\beta)u=\alpha(\beta u)$

$$(\alpha\beta)u(x)=\alpha(\beta u(x))$$
$$(\alpha\beta)u(x)=\alpha(\beta u)(x)$$

إذن : $(\alpha\beta)u=\alpha(\beta u)$

3- نبين أن : $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$

4- نبين أن : $1u=u$

استنتاج

من- أ – و- ب - : $(I;*;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

الطريقة 2 (الفضاء المتجهي الجزئي)

نبين أن : $(I;*;\cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+;\cdot)$

$I\neq\emptyset$ لأن : $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\in I$ $\quad(1)$

نعتبر : $(u;v)\in I^2$ و $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

و نبين أن : $(\alpha u+\beta v)\in I$

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$$(\alpha u+\beta v)(-x)=\alpha u(-x)+\beta v(-x)$$
$$=-\alpha u(x)-\beta v(x)$$
$$(\alpha u+\beta v)(-x)=-(\alpha u+\beta v)(x)$$

إذن :

$$(2)\ \ (\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2)(\forall(u;v)\in I^2):\ (\alpha u+\beta v)\in I$$

و من (1) و (2) : $(I;*;\cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+;\cdot)$

و بالتالي : $(I;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

2- نبين أن: $(P;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

نبين أن : $(P;+;\cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+;\cdot)$

$P\neq\emptyset$ لأن : $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\in P$ $\quad(1)$

نعتبر : $(u;v)\in P^2$ و $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

و نبين أن : $(\alpha u+\beta v)\in P$

ليكن $x\in\mathbb{R}$

$$(\alpha u+\beta v)(-x)=\alpha u(-x)+\beta v(-x)$$
$$=\alpha u(x)+\beta v(x)$$
$$(\alpha u+\beta v)(-x)=(\alpha u+\beta v)(x)$$

إذن :

$$(2)\ \ (\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2)(\forall(u;v)\in P^2):\ (\alpha u+\beta v)\in P$$

و من (1) و (2) : $(P;+;\cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+;\cdot)$

و بالتالي : $(P;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

تمرين2

في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\cdot)$

اكتب : $M=\begin{pmatrix}2&-7\\10&5\end{pmatrix}$ كتأليفة خطية ل

$M_1=\begin{pmatrix}1&4\\0&5\end{pmatrix}$ و $M_2=\begin{pmatrix}0&3\\-2&1\end{pmatrix}$

الحل

لدينا : $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

إذن : $M = 2M_1 - 5M_2$

تمرين3

بين أن : $((2;3);(-1;5))$ تولد الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{R}^2;+;\bullet)$

الحل

لنبين أن : $((2;3);(-1;5))$ تولد الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{R}^2;+;\bullet)$

نعتبر : $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x;y) = \alpha(2;3) + \beta(-1;5) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = x \\ -1\alpha + 5\beta = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{5x-3y}{13} \\ \beta = \dfrac{x+2y}{13} \end{cases}$$

إذن :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \ \exists (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2 : (x;y) = \alpha(2;3) + \beta(-1;5)$$

بحيث : $\alpha = \dfrac{5x-3y}{13} \ ; \beta = \dfrac{x+2y}{13}$

و منه : $((2;3);(-1;5))$ أسرة مولد ة ل $(\mathbb{R}^2;+;\bullet)$

تمرين4

في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\bullet)$

بين أن : $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ أسرة حرة

الحل

نعتبر : $(\alpha;\beta;\gamma) \in \mathbb{R}^3$

بحيث : $\alpha\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ثم نبين أن : $\alpha = \beta = \gamma = 0$

لدينا : $\alpha\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

إذن : $\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha+\gamma \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ومنه : $\alpha = \beta = \gamma = 0$

B أسرة حرة

تمرين5

في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R});+;\bullet)$

بين أن : $B = (1;\cos^2 x;\cos 2x)$ أسرة مقيدة

الحل

لدينا : $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

إذن : B أسرة مقيدة

تمرين6

1- في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\bullet)$

بين أن : $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

أساس في $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\bullet)$ ثم استنتج بُعْدَ $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

2- في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{R}^2;+;\bullet)$

بين أن : $B = ((1;0);(0;1))$ أساس في $(\mathbb{R}^2;+;\bullet)$

ثم استنتج بُعْدَ $\mathbb{R}^2$

3- في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathscr{P}_2;+;\bullet)$

بين أن : $B = (1;x;x^2)$ أساس في $(\mathscr{P}_2;+;\bullet)$

ثم استنتج بُعْدَ $\mathscr{P}_2$

الحل

1- أ - نبين أن : B أسرة مولد ة ل $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

نعتبر : $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

إذن : B أسرة مولد ة ل $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

ب - نبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $(a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4$

بحيث : $a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ثم نبين أن : $a = b = c = d = 0$

لدينا : $a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

إذن: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

و منه : $a = b = c = d = 0$

إذن : B أسرة حرة

ومن أ - ب : B أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\bullet)$

إذن : $\dim \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = cardB$

$$\boxed{\dim \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = 4}$$

2- أ - نبين أن : B أسرة مولد ة ل $\mathbb{R}^2$

نعتبر : $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

$(a;b)=a(1;0)+b(0;1)$

إذن : B أسرة مولدة ل $\mathbb{R}^2$

ب - نبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

بحيث : $a(1;0)+b(0;1)=(0;0)$

ثم نبين أن : $a=b=0$

لدينا : $a(1;0)+b(0;1)=(0;0)$

إذن : $(a;b)=(0;0)$

و منه : $a=b=0$

إذن : B : أسرة حرة

ومن أ- ب : B أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2;+;\bullet)$

إذن : $\dim\mathbb{R}^2=cardB$

$\boxed{\dim\mathbb{R}^2=2}$

2- أ - نبين أن : B أسرة مولدة ل $\mathscr{P}_2$

نعتبر : $(ax^2+bx+c)\in\mathscr{P}_2$

$ax^2+bx+c=a(x^2)+b(x)+c(1)$

إذن : B أسرة مولدة ل $\mathscr{P}_2$

ب - نبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$

بحيث : $ax^2+bx+c=0$

ثم نبين أن : $a=b=c=0$

لدينا : $ax^2+bx+c=0$

إذن : $a=b=c=0$

و منه : B أسرة حرة

ومن أ- ب : B أساس للفضاء المتجهي $(\mathscr{P}_2;+;\bullet)$

إذن : $\dim\mathscr{P}_2=cardB$

$\boxed{\dim\mathscr{P}_2=3}$

تمرين7

$$F=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / x+y=0\}$$

1- بين أن : $(F;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

2- حدد أساسا ل F ثم استنتج بُعْدَه

الحل

1- لنبين أن : F فضاء متجهي حقيقي

نبين أن : F فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathbb{R}^2;+;\bullet)$

$F\neq\varnothing$ لأن : $(0;0)\in F$ $\quad(1)$

نعتبر : $((x;y);(x';y'))\in F^2$ و $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

نبين : $\alpha(x;y)+\beta(x';y')\in F$

$\alpha(x;y)+\beta(x';y')=(\alpha x+\beta x';\alpha y+\beta y')$

$(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')=\alpha(x+y)+\beta(x'+y')$

$(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')=0$

إذن :

$(2)\quad \forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\ \forall((x;y);(x';y'))\in F^2 : \alpha(x;y)+\beta(x';y')\in F$

و منه (1) و (2) :

F فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathbb{R}^2;+;\bullet)$

و منه : F فضاء متجهي حقيقي

2- حدد أساسا ل F ثم استنتج بُعْدَه

نعتبر : $(x;y)\in F$ إذن : $y=-x$

ومنه : $(x;y)=(x;-x)$

$(x;y)=x(1;-1)$

إذن : $B=((1;-1))$ أسرة مولدة ل F

لنبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $a\in\mathbb{R}$ بحيث : $a(1;-1)=(0;0)$

ثم نبين أن : $a=0$

لدينا : $a(1;-1)=(0;0)$ إذن : $(a;-a)=(0;0)$

و منه : $a=0$

إذن : B : أسرة حرة

بما أن : $B=((1;-1))$ أسرة مولدة ل F و حرة

فإن : B أساس للفضاء المتجهي F

إذن : $\dim F=cardB$

$\boxed{\dim F=2}$

تمرين8

$$E=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / -3x+y-2z=0\}$$

$$F=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / -x+y+z=0\}$$

1- أ - بين أن : $(E;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- حدد أساسا ل E ثم استنتج بُعْدَه

2- أ - بين أن : $(F;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- حدد أساسا ل F ثم استنتج بُعْدَه

3- أ- بين أن : $(E\cap F;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- حدد أساسا ل $E\cap F$ ثم استنتج بُعْدَه

الحل

1- أ - لنبين أن : $(E;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

نبين أن : E فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathbb{R}^3;+;\bullet)$

$E\neq\varnothing$ لأن : $(0;0;0)\in E$ $\quad(1)$

نعتبر : $((x;y;z);(x';y';z'))\in E^2$ و $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

نبين : $\alpha(x;y;z)+\beta(x';y';z')\in E$

$$\alpha(x;y;z)+\beta(x';y';z')=(\alpha x+\beta x';\alpha y+\beta y';\alpha z+\beta z')$$

$$-3(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')+2(\alpha z+\beta z')=\alpha(-3x+1y+2z)+\beta(-3x'+1y'+2z')$$

إذن : $-3(\alpha x+\beta x')+(\alpha y+\beta y')+2(\alpha z+\beta z')=0$

ومنه : (2)

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\ \forall((x;y;z);(x';y';z'))\in E^2 : \alpha(x;y;z)+\beta(x';y';z')\in E$$

و من (1) و(2) :

E فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathbb{R}^3;+;\bullet)$

و منه : E فضاء متجهي حقيقي

ب- تحديد أساس ل E ثم استنتاج بُعْدَه

نعتبر : $(x;y;z)\in E$ إذن : $y=3x-2z$

$$(x;y;z)=(x;3x-2z;z)$$

$$\boxed{(x;y;z)=x\,(1;3;0)+z\,(0;-2;1)}$$

إذن : $B=((1;3;0),(0;-2;1))$ أسرة مولدة ل E

لنبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ بحيث : $a(1;3;0)+b(0;-2;1)=(0;0;0)$

ثم نبين أن : $a=b=0$

لدينا : $a(1;3;0)+b(0;-2;1)=(0;0;0)$

إذن : $(a;3a-2b;b)=(0;0;0)$

و منه : $a=b=0$

إذن : B أسرة حرة

بما أن : B أسرة مولدة ل E و حرة

فإن : B أساس للفضاء المتجهي E

إذن : $\dim E=cardB$

$$\boxed{\dim E=2}$$

2- أ - بين أن : $(F;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

بنفس طريقة 1-أ نجد :

F فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathbb{R}^3;+;\bullet)$

و منه : $(F;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- تحديد أساس ل F ثم استنتاج بُعْدَه

نعتبر : $(x;y;z)\in E$ إذن : $x=y+z$

$$(x;y;z)=(y+z;y;z)$$

$$\boxed{(x;y;z)=y\,(1;1;0)+z\,(1;0;1)}$$

بنفس طريقة 1 ب نبين أن :

$B=((1;1;0),(1;0;1))$ أساس للفضاء المتجهي F

إذن : $\dim F=cardB$

$$\boxed{\dim F=2}$$

3- أ- تحديد $E\cap F$

$$E\cap F=\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / \begin{cases}-3x+y-2z=0\\ -x+y+z=0\end{cases}\right\}$$

$$E\cap F=\left\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3 / \begin{cases}x=-\dfrac{3}{2}z\\ y=-\dfrac{5}{2}z\end{cases}\right\}$$

$$E\cap F=\left\{\left(-\frac{3}{2}z;-\frac{5}{2}z;z\right) / z\in\mathbb{R}\right\}$$

- لنبين أن : $(E\cap F;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

بنفس طريقة 1-أ نجد :

$E\cap F$ فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathbb{R}^3;+;\bullet)$

و منه : $(E\cap F;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- تحديد أساس ل E ثم استنتاج بُعْدَه

$$\left(-\frac{3}{2}z;-\frac{5}{2}z;z\right)=z\left(-\frac{3}{2};-\frac{5}{2};1\right)$$

بنفس طريقة 1 ب نبين أن :

$B=\left(\left(-\frac{3}{2};-\frac{5}{2};1\right)\right)$ أساس للفضاء المتجهي $E\cap F$

إذن : $\dim E\cap F=cardB$

$$\boxed{\dim E\cap F=1}$$

تمرين9

لكل : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ و $x\in\mathbb{R}^{*+}$

نعتبر الدالة العددية : $\varphi_{(a;b)}(x)=\ln\left(x^a e^{bx}\right)$

$$E=\left\{\varphi_{(a;b)} / (a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

أ - بين أن : $(E;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- حدد أساسا ل E ثم استنتج بُعْدَه

الحل

$$\varphi_{(a;b)}(x)=\ln\left(x^a e^{bx}\right)$$

$$=\ln\left(x^a\right)+\ln\left(e^{bx}\right)$$

$$\boxed{\varphi_{(a;b)}(x)=a\ln(x)+bx}$$

أ - لنبين أن : $(E;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

نبين أن : E فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+;\bullet)$

$E\neq\varnothing$ لأن : $\varphi_{(0;0)}=0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\in E$ $\quad(1)$

نعتبر : $(\varphi_{(a;b)};\varphi_{(c;d)})\in E^2$ و $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

و نبين أن : $(\alpha\varphi_{(a;b)}+\beta\varphi_{(c;d)})\in E$

ليكن $x\in\mathbb{R}^{*+}$

$$(\alpha\varphi_{(a;b)}+\beta\varphi_{(c;d)})(x)=\alpha\varphi_{(a;b)}(x)+\beta\varphi_{(c;d)}(x)$$
$$=\alpha(a\ln(x)+bx)+\beta(c\ln(x)+dx)$$
$$=(\alpha a+\beta c)\ln(x)+(\alpha b+\beta d)x$$
$$=\varphi_{(\alpha a+\beta c;\alpha b+\beta d)}(x)$$
$$\boxed{\alpha\varphi_{(a;b)}+\beta\varphi_{(c;d)}=\varphi_{(\alpha a+\beta c;\alpha b+\beta d)}}$$

إذن : (2)

$$(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2)\left((\varphi_{(a;b)};\varphi_{(c;d)})\in E^2\right):\left(\alpha\varphi_{(a;b)}+\beta\varphi_{(c;d)}\right)\in E$$

و من (1) و (2) : $(E;*;\bullet)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});+;\bullet)$

و بالتالي : $(E;*;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- تحديد أساس ل E ثم استنتاج بُعْدَه

نعتبر : $\varphi_{(a;b)}\in E$ و $x\in\mathbb{R}^{*+}$

إذن : $\varphi_{(a;b)}(x)=a\ln(x)+bx$

و منه : $B=(\varphi_{(1;0)},\varphi_{(0;1)})$ أسرة مولدة ل E

بحيث : $\varphi_{(1;0)}(x)=\ln(x)$ و $\varphi_{(0;1)}(x)=x$

لنبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ بحيث : $a\varphi_{(1;0)}(x)+b\varphi_{(0;1)}(x)=0$

ثم نبين أن : $a=b=0$

لدينا : $a\varphi_{(1;0)}(x)+b\varphi_{(0;1)}(x)=0$

إذن : $a\ln(x)+bx=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^{*+}$

نعتبر : $x=1$ نجد : $b=0$

نعتبر : $x=e$ نجد : $a=0$

و منه : $a=b=0$

إذن : B : أسرة حرة

بما أن : B أسرة مولدة ل E و حرة

فإن : B أساس للفضاء المتجهي E

إذن : $\dim E=cardB$

$$\boxed{\dim E=2}$$

تمرين10

لكل : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ و $x\in]-1;1[$ ؛ $I=]-1;1[$

نعتبر الدالة العددية : $\varphi_{(a;b)}(x)=\dfrac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}$

$$E=\left\{\varphi_{(a;b)}/(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

أ - بين أن : $(E;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- حدد أساسا ل E ثم استنتج بُعْدَه

الحل

$$\varphi_{(a;b)}(x)=\frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}$$
$$=\frac{a(x+1)+b(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$\boxed{\varphi_{(a;b)}(x)=a\frac{1}{(x-1)}+b\frac{1}{(x+1)}}$$

أ - لنبين أن : $(E;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

نبين أن : E فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R});+;\bullet)$

لأن : $E\neq\emptyset$ $\quad \varphi_{(0;0)}=0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\in E \quad (1)$

نعتبر : $(\varphi_{(a;b)};\varphi_{(c;d)})\in E^2$ و $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$

و نبين أن : $(\alpha\varphi_{(a;b)}+\beta\varphi_{(c;d)})\in E$

ليكن $x\in]-1;1[$

$$(\alpha\varphi_{(a;b)}+\beta\varphi_{(c;d)})(x)=\alpha\varphi_{(a;b)}(x)+\beta\varphi_{(c;d)}(x)$$
$$=\alpha\left(a\frac{1}{(x-1)}+b\frac{1}{(x+1)}\right)+\beta\left(c\frac{1}{(x-1)}+d\frac{1}{(x+1)}\right)$$
$$=(\alpha a+\beta c)\frac{1}{(x-1)}+(\alpha b+\beta d)\frac{1}{(x+1)}$$
$$=\varphi_{(\alpha a+\beta c;\alpha b+\beta d)}(x)$$
$$\boxed{\alpha\varphi_{(a;b)}+\beta\varphi_{(c;d)}=\varphi_{(\alpha a+\beta c;\alpha b+\beta d)}}$$

إذن : (2)

$$(\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2)\left((\varphi_{(a;b)};\varphi_{(c;d)})\in E^2\right):\left(\alpha\varphi_{(a;b)}+\beta\varphi_{(c;d)}\right)\in E$$

و من (1) و (2) : $(E;*;\bullet)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R});+;\bullet)$

و بالتالي : $(E;*;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- تحديد أساس ل E ثم استنتاج بُعْدَه

نعتبر : $\varphi_{(a;b)}\in E$ و $x\in]-1;1[$

إذن : $\varphi_{(a;b)}(x)=a\dfrac{1}{(x-1)}+b\dfrac{1}{(x+1)}$

و منه : $B=(\varphi_{(1;0)},\varphi_{(0;1)})$ أسرة مولدة ل E

بحيث : $\varphi_{(1;0)}(x)=\dfrac{1}{(x-1)}$ و $\varphi_{(0;1)}(x)=\dfrac{1}{(x+1)}$

لنبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ بحيث : $a\varphi_{(1;0)}(x)+b\varphi_{(0;1)}(x)=0$

ثم نبين أن : $a=b=0$

لدينا : $a\varphi_{(1;0)}(x)+b\varphi_{(0;1)}(x)=0$

إذن : $a\dfrac{1}{(x-1)}+b\dfrac{1}{(x+1)}=0 \quad \forall x\in]-1;1[$

نعتبر : $x=0$ نجد : $a=b$

إذن : $\forall x\in]-1;1[\quad a\left(\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x+1)}\right)=0$

و منه : $\forall x\in]-1;1[\quad a\times\frac{2x}{x^{2}-1}=0$

إذن : $a=0$:

و منه : $a=b=0$

إذن : B : أسرة حرة

بما أن : B أسرة مولدة لـ E و حرة

فإن : B أساس للفضاء المتجهي E

إذن : $\dim E=cardB$

$\boxed{\dim E=2}$

تمرين11

$B_1=\left(\vec{u_1};\vec{u_2};\vec{u_3}\right)$ أساس في فضاء متجهي حقيقي E بُعْدَه 3

$B_2=\left(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3}\right)$ أسرة بحيث :

$$\begin{cases}\vec{e_1}=\vec{u_1}+\vec{u_2}+\vec{u_3}\\ \vec{e_2}=\vec{u_1}-2\vec{u_2}-\vec{u_3}\\ \vec{e_3}=2\vec{u_1}-\vec{u_2}+\vec{u_3}\end{cases}$$

1- بين أن B_2 أساس في E

2- $\vec{u}(1;2;3)_{B_1}$ في الأساس B_1 أوجد احداثيات $\vec u$ في الأساس B_2

الحل

1- لدينا : $\vec{e_1}(1;1;1);\vec{e_2}(1;-2;-1);\vec{e_3}(2;-1;1)$ في الأساس B_1

و $\dim E=3$ و $cardB_2=3$

إذن : $\dim E=cardB_2$

ومنه : للبرهنة أن B_2 أساس في E

يكفي أن نبرهن أن : B_2 حرة

لدينا : $\det\left(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3}\right)=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&-2&-1\\1&-1&-1\end{vmatrix}=3$

بما أن : $\det\left(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3}\right)\neq 0$ فإن : B_2 حرة

ومنه : B_2 أساس في E

2- $\vec{u}(1;2;3)_{B_1}$ في الأساس B_1 أوجد احداثيات $\vec u$ في الأساس B_2

نعتبر : $\vec{u}(a;b;c)_{B_2}$ في الأساس B_2

إذن :

$$\vec u=a\vec{e_1}+b\vec{e_2}+c\vec{e_3}$$

$$\vec u=a\left(\vec{u_1}+\vec{u_2}+\vec{u_3}\right)+b\left(\vec{u_1}-2\vec{u_2}-\vec{u_3}\right)+c\left(2\vec{u_1}-\vec{u_2}+\vec{u_3}\right)$$

$$\vec u=(a+b+c)\vec{u_1}+(a-2b-c)\vec{u_2}+(a-b+c)\vec{u_3}$$

ولدينا : $\vec u=\vec{u_1}+2\vec{u_2}+3\vec{u_3}$

إذن : $\begin{cases}a+b+c=1\\a-2b-c=2\\a-b+c=3\end{cases}$ ومنه : $c=\frac{4}{3};b=-\frac{5}{3};a=0$

إذن : $\boxed{\vec u\left(0;-\frac{5}{3};\frac{4}{3}\right) \text{ في الأساس } B_2}$

تمرين 12

$$E=\left\{M=\begin{pmatrix}a&c&b\\b&a+c&b+c\\c&b&a+c\end{pmatrix}/(a;b;c)\in\mathbb{R}^3\right\}$$

نضع : $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};J=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix};k=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$

1- تحقق أن : $IK=KJ=I+J;k^2=J+K;j^2=K$

2- بين أن : $(E;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي و حدد أساسا له

3- بين أن : $(E;+;\times)$ حلقة واحدية

4- تحقق أن : $J^3=I+J$ ثم حدد J^{-1}

الحل

1- نتحقق أن : $IK=KJ=I+J;k^2=J+K;j^2=K$

الحساب

2- $(E;+;\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

يكفي أن نبين أن : E فضاء متجهي جزئي من $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+;\bullet)$

تحديد أساس لـ E

$$\begin{pmatrix}a&c&b\\b&a+c&b+c\\c&b&a+c\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

إذن : $B_2=(I;J;K)$ أساس لـ E

3- لنبين أن : $(E;+;\times)$ حلقة واحدية

أ- نبين أن : $(E;+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+)$

و بما أن : $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});+)$ زمرة تبادلية

فإن : $(E;+)$ زمرة تبادلية (1)

ب- نبين أن : $(E;\times)$ جزء مستقر من $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$

و بما أن : $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$ تجميعي تبادلي يقبل عنصرا محايدا I

و $I\in E$

و $\times$ توزيعي بالنسبة لـ $+$ في $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$

فإن : $(E;\times)$ تجميعي تبادلي يقبل عنصرا محايدا I

و $\times$ توزيعي بالنسبة لـ $+$ في E (2)

من (1) و (2) : $(E;+;\times)$ حلقة واحدية

-4 $J^3 = I + J$ (الحساب)

$$J^3 = I + J \Rightarrow J^{-1}J^3 = J^{-1}I + J^{-1}J$$
$$\Rightarrow J^2 = J^{-1} + I$$
$$\Rightarrow J^{-1} = I - J^2$$
$$\Rightarrow J^{-1} = I - K$$

ومنه : $J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

تمرين 13

حدد : M^{-1}

1 - $M = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ -2 $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

الحل

-1 تحديد : M^{-1} بحيث : $M = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$$\det M = \frac{1}{2}$$

$Com(M) = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ و ${}^tCom(M) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

لدينا : $M^{-1} = \frac{1}{\det M} \times {}^t(comM)$

إذن : $M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

-2 تحديد : M^{-1} بحيث : $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\det M = 12$$

$$Com(M) = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ -15 & 6 & 3 \\ 17 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

$${}^tCom(M) = \begin{pmatrix} -7 & -15 & 17 \\ 6 & 6 & -6 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

لدينا : $M^{-1} = \frac{1}{\det M} \times {}^t(comM)$

إذن : $M^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -7 & -15 & 17 \\ 6 & 6 & -6 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$