

التمرين الأول

- لكل دالة عددية معرفة بما يلي : $f(x) = \ln\left(\frac{4x}{x+1}\right) - \sqrt{x}$ وليكن (C_f) منحناها في \mathbb{R}^+ $(O; \vec{i}; \vec{j})$
1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب نهايات f عند محددات D_f
 2. ادرسه الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)
 3. بيه أه : $f'(x) = \frac{x + \sqrt{x} + 2}{2x(x+1)}(1 - \sqrt{x})$: $(\forall x > 0)$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f
 4. أنشئ المنحنى (C_f) (تقبل أه ل (C_f) نقطة انعطاف أفصولها x_0 بحيث $3 < x_0 < 4$)

التمرين الثاني

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln x}$

- 1 أ- حدد D_f مجموعة تعريف f
ب- احسب نهايات الدالة f عند محددات D_f
- 2 احسب المشتقة $f'(x)$
- 3 نضع $g(x) = x \ln x - (x+1) \ln(x+1)$ حيث $x \in \mathbb{R}^+$
أ- احسب المشتقة $g'(x)$ و بيه أه g تناقصية
ب- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ ثم استنتج أه $g(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}^+$
- 4 أنجز جدول تغيرات الدالة f
- 5 أرسم المنحنى (C_f)

التمرين الثالث

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x) = \ln x \ln(1-x)$; $x \neq 0$; $x \neq 1$ و $f(0) = f(1) = 0$

- 1 حدد مجموعة تعريف f و بيه أه المستقيم $x = \frac{1}{2}$: محور تماثل للمنحنى (C_f)
- 2 أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ماذا تستنتج ؟
ب- ادرسه قابلية اشتقاق الدالة f على يميه $x_0 = 0$
- 3 لكل g الدالة المعرفة على $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ بما يلي : $g(x) = (1-x) \ln(1-x) - x \ln x$
أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$
ب- احسب $g'(x)$ و بيه أه $g''(x) = \frac{2x-1}{x(1-x)}$
- ج- بيه أه المعادلة $g'(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ثم حدد إشارة الدالة $g(x)$
- 4 بيه أه $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1-x)}$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f على D_f
- 5 بيه أه $0 < \ln x \ln(1-x) < (\ln 2)^2$: $\forall x \in]0, 1[$
- 6 أرسم المنحنى (C_f)

التمرين الرابع

الجزء (1) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = \frac{-2}{x^2+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

- 1 احسب نهايتي الدالة g
- 2 احسب $g'(x)$ ثم منج جدول تغيرات الدالة g
- 3 بيه أه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي للمجال $]0, 1[$ و استنتج إشارة $g(x)$

الجزء (2) لئلكه f الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $x \neq 0$: $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ و $f(0) = 0$

(1) بيه أه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و أعط تؤولها هندسيا للنتيجة

(2) أ- تحقق أه $f(x) = x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln x$ ($\forall x > 0$) و بيه أه f متصلة على يمينه $x_0 = 0$

ب- أدرسه قابلية اشتقاق الدالة f على يمينه $x_0 = 0$

(3) بيه أه $f'(x) = g(x)$ ($\forall x > 0$) ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

(4) أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha = 0,5$ و $f(\alpha) = 0,8$)

التمرين الخامس

ليلكه n عددا من \mathbb{N} و بحيث $n \geq 2$. نعتبر الدالة $f_n(x) = -x^2 + 2 + n \ln x$

(1) أحسب النهايتيه $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

(2) أحسب الدالة المشتقة $f_n'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f_n

(3) أ- نضع $g(x) = x \ln x - x + 2$

(i) أحسب $g'(x)$ و أعط جدول تغيرات الدالة g

(ii) استنتج أه $g(x) > 0$ ($\forall x \in]0, +\infty[$)

ب- تحقق أه $f\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) > 0$ ثم بيه أه المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حليه U_n و V_n (نأخذ $U_n < V_n$)

ج- أحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ و بيه أه $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln V_n}{\ln n} = \frac{1}{2}$

(4) أ- بيه أه $U_n < 1$ ($\forall n \geq 2$)

ب- تحقق أه $f_{n+1}(U_n) = \ln(U_n)$ و بيه أه المتتالية $(U_n)_{n \geq 3}$ تزايدية

ج- حدد $\ln U_n$ بدلالة U_n , n و بيه أه $-\frac{2}{n} \leq \ln U_n \leq -\frac{1}{n}$ ($\forall n \geq 2$) ثم حدد النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين السادس

نعتبر الدالة العددية المعرفة f على $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \ln|\sqrt{x}-1|$

وليلكه (C_f) منحنائها في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

[1] أ- أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

ب- أدرسه الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

[2] أدرسه قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0 = 0$ على اليمينه . ثم أول النتيجة المحصل عليها هندسيا .

[3] أ- بيه أه : $f'(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$

ب- حدد إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

[4] أنشئ المنحنى $(C_{g^{-1}})$.

التمرين السابع

(I) نعتبر الدالة العددية h المعرفة بما يلي : $h(x) = \frac{2x^2}{x^2-1} + \ln|x^2-1|$

1. حدد D_h ثم أحسب نهايات h عند محداث D_h

2. بيه أه : $h'(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$ ($\forall x \in D_h$)

3. أعط جدول تغيرات الدالة h

4. استنتج إشارة $h(x)$ لكل x مع D_h

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = x \ln|x^2 - 1|$ و (C_f) منحناها في \mathbb{R}^3 في $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. أ- حدد D_f ثم أحسب نهايات f عند محددات D_f

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصلة

2. أ- بيه أنه : $(\forall x \in D_f); f'(x) = h(x)$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f

3. استنتج مع خلال دراسة الدالة h إحداثيتي I نقطة انعطاف المنحنى (C_f)

4. أ- حل في D_f المعادلة $f(x) = 0$

ب- أنشئ المنحنى (C_f)

التمرين الثامن

[I] 1) نعتبر الدالة $g(x) = \frac{-1}{x+1} + 2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ حيث $x \in]0, +\infty[$

أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

ب- أحسب المشتقة $g'(x)$ و منج جدول تغيرات الدالة g ثم استنتج إشارة $g(x)$

1) نضع $v(x) = \frac{x^3}{3}$ و $u(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$

بيه أنه $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leq \frac{1}{1+x} - 1 + x \leq x^2$ ثم استنتج أنه $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leq u(x) \leq v(x)$

[II] لئلك f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^+ كما يلي : $f(x) = x^2 \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right)$; $x \neq 0$ و $f(0) = 0$

1) أ- بيه أنه f متصلة على يمينه 0

ب- أدرسه قابلية اشتقاق f على يمينه 0

2) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب- أدرسه الفرع اللانهائي للمنحنى C_f بجوار $+\infty$

3) أحسب المشتقة $f'(x)$ ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f

4) أرسم المنحنى C_f

التمرين التاسع

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = x + \ln x$

1) أحسب نهايتي الدالة f

2) أدرسه منج تغيرات الدالة f و منج جدول تغيراتها

3) ليك n عددا مع \mathbb{N} .

أ- بيه أنه المعادلة $f(x) = n$ تقبل حلا وحيدا v_n

ب- حدد قيمة v_1 و بيه أنه المتتالية $(v_n)_n$ تزايدية

4) نضع $g(x) = \ln x - x + 1$

أ- أدرسه تغيرات الدالة g و أنجز جدول تغيراتها

ب- استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $(\Delta) y = 2x - 1$

5) بيه أنه $\frac{n+1}{2} \leq v_n$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

التمرين العاشر

التمرين العاشر

نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x) = x^2 + x - \ln(x+1)$

(1) حدد مجموعة تعريف الدالة g و أحسب النهاية $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x)$

(2) أ- أثبت أنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

ب- بينه أن المنحنى (C_g) يقبل عند $+\infty$ فرعا شلجيميا اتجاهه محور الارتفاع

(3) أحسب الدالة المشتقة و أنجز جدول تغيرات الدالة g

(4) أرسم المنحنى (C_g)

(5) نضع $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$

أ- أدرسه تغيرات الدالة f

ب- بينه أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حليه $x_0 = 0$ و α بحيث $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

ج- استنتج أنه $(\forall x \in]0, \alpha[) g(x) < x$

(6) لئلك $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرف كما يلي : $U_0 = \frac{1}{e}$ و $U_{n+1} = g(U_n)$

أ- بينه أنه $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < U_n < \alpha$

ب- أدرسه رتبة المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و استنتج أنه $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الحادي عشر

التمرين الحادي عشر

ليكن n عددا طبيعيا من \mathbb{N}^* و نعتبر الدالية $g_n(x) = 1 + (1-n)x^n - \ln x$

$$\begin{cases} f_n(x) = \frac{x}{x^n - \ln x} , & x \neq 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

(1) بينه أنه $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) x^n > \ln x$ و استنتج مجموعة تعريف الدالة f_n

(2) أ- أدرسه اتصال الدالة f_n على يمين $x_0 = 0$

ب- أدرسه قابلية اشتقاق الدالة f_n على يمين $x_0 = 0$

(3) أ- أدرسه منحنى تغيرات الدالة g_n

ب- بينه أنه المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا نرمز له بالرمز b_n

ج- بينه أنه $(\forall n \geq 3) \sqrt[n]{\frac{1}{n}} < b_n < 1$

د- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ و استنتج أنه $(b_n)_n$ متقاربة و أنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 1$

هـ- بينه أنه $b_n^n = \frac{1 - \ln b_n}{n-1}$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(b_n)^n = 1$

(4) أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

(5) أحسب f_n' و نضع جدول تغيرات الدالة f_n

(6) أرسم المنحنيين (C_1) ; (C_2) للدالتين f_1 , f_2

التمرين الثاني عشر
التمرين الثالث عشر

الجزء الأول : نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ بما يلي : $g(x) = \ln(|x-2|) - \frac{x-1}{x-2}$

(1) أ- أحسب نهايات الدالة g عند محددات مجموعة التعريف
ب- أدرسه الفروغ الانعكاسية للمنحنى (C_g)

ج- أحسب المشتقة $g'(x)$ ثم صنح جدول تغيرات الدالة g

(2) أ- بيه أه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $]2, +\infty[$ حلا وحيدا α و أه $5 < \alpha < 6$

ب- استنتج إشارة الدالة $g(x)$ على $\mathbb{R} - \{2\}$

ج- أدرسه تقعر المنحنى (C_g) و حدد نقطة انعطاف و أنشئ المنحنى (C_g) (نأخذ $\alpha = 5,59$)

(3) ليكّه h قصور الدالة g على المجال $[1, 2[$

أ- بيه أه h تقبل دالة عكسية h^{-1} معرفة على مجال $J = [0, +\infty[$

ب- بيه أه h^{-1} قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

ج- أدرسه قابلية اشتقاق الدالة h^{-1} على يمينه $x_0 = 0$

د- (i) بيه أه $h^{-1}(a_n) = 1 + \frac{1}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists! a_n \in]0, +\infty[)$

(ii) أدرسه رتابة المتتالية $(a_n)_{n \geq 1}$ و استنتج أنها متقاربة ثم حدد نهايتها

الجزء الثاني :

(1) أ- بيه أه المعادلة $g(x) = x$ تقبل في المجال $[0, 1]$ حلا وحيدا β

ب- بيه أه $g([0, 1]) \subseteq [0, 1]$

(2) بيه أه $(\forall x \in [0, 1]) |g'(x)| \leq \frac{1}{4}$

(3) نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

أ- بيه أه $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq u_n \leq 1$

ب- بيه أه $(\forall n \in \mathbb{N}) |u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4} |u_n - \beta|$

ج- استنتج أه المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثالث عشر
التمرين الثالث عشر

الجزء (1) ليكّه g الدالة المعرفة على $]-1, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = -\frac{x}{x+1} + 2\ln(x+1)$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و بيه أه $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty$

(2) أ- بيه أه $g'(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$

ب- صنح جدول تغيرات الدالة g

ج- بيه أه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $]-1, -\frac{1}{2}[$ حلا وحيدا α

(3) أحسب $g(0)$ و استنتج أه $g(x) < 0$ على المجال $]\alpha, 0[$ و أه $g(x) > 0$ على المجال $]-1, \alpha[$ و $]0, +\infty[$

الجزء (2) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-1, +\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{\ln(1+x)} & x \neq 0 ; x \neq -1 \\ f(0) = 0 & ; f(-1) = 0 \end{cases}$

- (1) أ- يبيه أنه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ و أعط تؤولا هندسيا للنتيجة
- (2) أ- يبيه أنه f متصلة في النقطة $x_1 = -1$ على اليمين
ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين النقطة $x_1 = -1$ و أعط تؤولا هندسيا للنتيجة
- (3) أ- يبيه أنه $f'(x) = \frac{x g(x)}{(\ln(1+x))^2}$ ($\forall x \in]-1, +\infty[- \{0\}$)
ب- تحقق أنه $f(\alpha) = \frac{2(\alpha+1)}{\alpha}$ و أنجز جدول تغيرات الدالة f
- (4) أ- يبيه أنه $x - \ln(x+1) \geq 0$ لكل x من المجال $]-1, +\infty[$
ب- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $y = x$
- (5) أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha \approx -0,7$ و $f(\alpha) \approx -0,4$)

التمرين الرابع عشر

الجزء الأول: نعتبر الدالة g المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي: $g(x) = \frac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2)$

(1) أدرس منحنى تغيرات الدالة g

(2) استنتج أنه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي للمجال $\left] \frac{4}{3}, 2 \right[$

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R}^+

الجزء الثاني:

لكل f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي: $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$; $x \neq 0$ و $f(0) = 0$

(1) أ- أدرس زوجية الدالة f

ب- يبيه أنه f قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0 = 0$ و أعط معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة $x_0 = 0$

ج- يبيه أنه $\ln(1+x) \leq x$ ($\forall x \in]-1, +\infty[$) ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المماس (T)

(2) أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(3) أحسب المشتقة $f'(x)$ و أدرس تغيرات الدالة f ثم ضع جدول تغيراتها

(4) أرسم المنحنى (C_f)

الجزء الثالث:

نضع $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ لكل x من \mathbb{R}

(1) أدرس زوجية الدالة F

(2) أحسب $F'(x)$ و أدرس إشارتها ثم أنجز جدول التغيرات

(3) أ- يبيه أنه $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{2}x^2$ (يمكن استعمال نتيجة الجزء الثاني (1) - ج)

ب- يبيه أنه $(\forall t \geq 1) \frac{\ln(t^2)}{t} \leq \frac{\ln(1+t^2)}{t} \leq \frac{\ln(2t^2)}{t}$

ج- أحسب التكامل $\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$ و استنتج النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$

(4) أرسم المنحنى (Γ_F)