أكاديمية الجهة الشرقية نيابة وجدة	مادة الرياضيات	المستوى : الأولى باك علوم تجريبية الأستاذ : عثماني نجيب مذكرة رقم 11/

مذكرة رقم 11 في درس دراسة الدوال

الأهداف و القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
ـ الفروع اللانهائية: المستقيمات المقاربة؛ الاتجاهات المقاربة؛ ـ نقط الانعطاف؛ تقعر منحنى دالة؛ ـ عناصر تماثل منحنى دالة.	ـ حل مبياني لمعادلات ومتراجحات؛ ـ استعمال الدورية وعناصر تماثل منحنى في اختصار مجموعة دراسة دالة؛ ـ استعمال إشارة المشتقة الثانية لدراسة تقعر منحنى وتحديد نقط انعطافه؛ ـ دراسة وتمثيل دوال حدودية ودوال جذرية ودوال لاجذرية؛ ـ دراسة وتمثيل دوال مثلثية بسيطة.	ـ ينبغي الاقتصار على تحديد نهايات دوال بسيطة (دوال حدودية من الدرجة الثانية والدرجة الثالثة أو دوال من الشكل $x \to ax+b+\varphi(x)$ حيث $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)=0$) عند محدات مجموعات تعريفها وتحديد فروعها اللانهائية؛ ـ ينبغي دراسة دوال لا يطرح حساب وإشارة مشتقاتها صعوبة بالغة؛ ـ ينبغي تناول الحل المبياني لمعادلات ومتراجحات من النوع $f(x)=c$ و $f(x)\le c$ و $f(x)\le g(x)$ و $f(x)=g(x)$ و $f(x)<g(x)$ حيث f و g دالتان من بين الدوال الواردة في البرنامج إذا لم يكن الحل الجبري في المتناول.

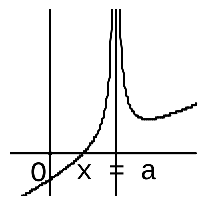
I. المستقيمات المقاربة

في جميع فقرات الدرس , ننسب المستوى إلى معلم متعامد $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. فرع لا نهائي لمنحنى دالة عددية

تعريف: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و $\left(C_f\right)$ منحناها في المعلم $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$.

إذا آلت إحدى احداثيي نقطة من $\left(C_f\right)$ إلى ما لا نهاية , نقول إن $\left(C_f\right)$ يقبل فرعا لا نهائيا.



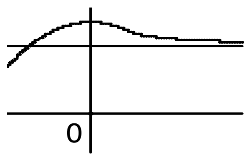
2. المقارب الموازي لمحور الأراتيب

تعريف: إذاكانت:

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=-\infty$ أو

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)=-\infty$

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $x=a$ مقارب للمنحنى $\left(C_f\right)$



مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$$f(x)=\frac{2x-1}{3x-6}$$

حدد $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ وأول النتيجتين هندسيا

الجواب : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2x-1}{3x-6}$

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$3x-6$	$-$ 0 $+$

$\lim\limits_{x\to 2^+} 2x-1=3$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} 3x-6=0^+$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} 3x-6=0^-$

ومنه : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$

التأويل المبياني : المستقيم ذا المعادلة $x=2$ مقارب للمنحنى $\left(C_f\right)$

والمقارب الموازي لمحور الأفاصيل

تعريف: إذا كانت: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ (أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$) ,

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $y=a$ مقارب للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$)

مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\dfrac{6x+1}{2x-5}$

حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وأول النتيجتين هندسيا

الجواب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x}{2x}=\frac{6}{2}=3$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x}{2x}=\frac{6}{2}=3$

التأويل المبياني : المستقيم ذا المعادلة $y=3$ مقارب للمنحنى $\left(C_f\right)$

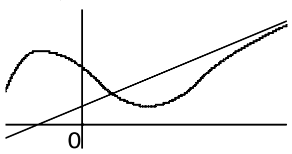
المقارب المائل

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و تقبل نهاية غير منتهية بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$)

إذا كانت: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$ (أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)=0$)

حيث $a\in\mathbb{R}^*$ و $b\in\mathbb{R}$

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$) .



مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=2x-1+\dfrac{1}{x-3}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f
2. حدد معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

الجواب:

1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-3\neq 0\}$ ومنه $D_f=\mathbb{R}-\{3\}=]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

2) $f(x)=2x-1+\dfrac{1}{x-3}$ يعني $f(x)-(2x-1)=\dfrac{1}{x-3}$

يعني $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-3}=\frac{1}{+\infty}=0$ ومنه المستقيم ذا المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

خاصية: يكون المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ مقاربا مائلا لمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ إذا وفقط إذا كان : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax=b$

II. الفروع الشلجمية

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x بحيث تقبل نهاية لا منتهية بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$) و (C_f) منحناها في معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1. فرع شلجمي اتجاهه محور الأفاصيل

تعريف: إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ (أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$) نقول إن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$)

مثال: نعتبر الدالة العددية f المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{x}$

أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ وأول هندسيا النتيجة

الجواب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{+\infty}=0$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

2. فرع شلجمي اتجاهه محور الأراتيب

تعريف: إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ نقول إن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3$ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ وأول هندسيا النتيجة

الجواب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

3. فرع شلجمي اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y=ax$ حيث $a\neq 0$:

تعريف: إذا كانت: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax=+\infty$

نقول إن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذي المعادلة $y=ax$ بجوار $+\infty$ (نفس التعريف بجوار $-\infty$)

مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{x}-x$

1. حدد حيز تعريف الدالة f و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. حدد طبيعة الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f

الجواب : (1 $D_f=\mathbb{R}^+$

(2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(1-\sqrt{x})=-\infty$

(3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}-1=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}-1=\frac{1}{+\infty}-1=-1=a$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(-1)x=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذي المعادلة $y=-x\Leftrightarrow y=(-1)x$ بجوار $+\infty$

III. تقعر منحنى – نقط الانعطاف

خاصية: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I و (C_f) منحناها في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

- إذا كانت f'' موجبة على المجال I فإن للمنحنى (C_f) تقعرا موجها نحو محور الأراتيب الموجبة.
- إذا كانت f'' سالبة على المجال I فإن للمنحنى (C_f) تقعرا موجها نحو محور الأراتيب السالبة.
- إذا كانت f'' تنعدم في النقطة $x_0\in I$ وتتغير إشارتها بجوار x_0 فان النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نقطة انعطاف المنحنى (C_f) .

مثال: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي : $f(x)=\frac{1}{12}x^4-2x^2+x+\frac{2}{3}$

1. أحسب $f''(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$
2. أدرس تقعر المنحنى (C_f) الممثل للدالة f مع تحديد نقطتي انعطافه

الجواب : (1

$$f'(x)=\left(\frac{1}{12}x^4-2x^2+x+\frac{2}{3}\right)'=\frac{1}{12}4\times x^3-4x+1=\frac{1}{3}x^3-4x+1$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-4x+1\right)'=x^2-4$$

(2 $f''(x)=0\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow x^2-2^2=0\Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=2$ أو $x=-2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

- تقعر (C_f) موجه نحو محورالأراتيب الموجبة على المجال: $]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$
- تقعر (C_f) موجه نحو محور الأراتيب الموجبة على المجال: $[-2,2]$

يمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

$A(1,f(1))$ و $B(-1,f(-1))$ نقطتي انعطافه

IV. محور تماثل – مركز تماثل

خاصية: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة على مجموعة D و (C_f) منحناها في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

- يكون المستقيم ذو المعادلة $x=a$ $(a\in\mathbb{R})$ محور تماثل المنحنى (C_f) إذا وفقط إذا كان : $\begin{cases}(\forall x\in D);(2a-x)\in D\\(\forall x\in D);f(2a-x)=f(x)\end{cases}$
- تكون النقطة $\Omega(a;b)$ مركز تماثل المنحنى (C_f) إذا وفقط إذا كان : $\begin{cases}(\forall x\in D);(2a-x)\in D\\(\forall x\in D);f(2a-x)=2b-f(x)\end{cases}$

مثال1 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{x-x^2}$

1. حدد حيز تعريف الدالة f

2. بين أن المستقيم $x=\frac{1}{2}$ محور تماثل للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f

الجواب:

1) $f(x)=\sqrt{x-x^2}$ $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-x^2\ge 0\}$

$x-x^2=0 \Leftrightarrow x(1-x)=0 \Leftrightarrow x=0$ أو $x=1$

ومنه جدول الاشارة :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ومنه: $D_f=[0,1]$

2) $x=a$ يعني $x=\frac{1}{2}$

أ) نبين أنه : اذا كانت $x\in[0,1]$ فان : $1-x\in[0,1]$ ؟؟؟

$x\in[0,1] \Leftrightarrow 0\le x\le 1 \Leftrightarrow -1\le -x\le 0 \Leftrightarrow 1-1\le 1-x\le 1+0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0\le 1-x\le 1 \Leftrightarrow 1-x\in[0,1]$

ب)نبين أن : $f(1-x)=f(x)$ ؟؟؟؟

$f(1-x)=\sqrt{(1-x)-(1-x)^2}=\sqrt{1-x-(1-2x+x^2)}$

$=\sqrt{1-x-1+2x-x^2}=\sqrt{x-x^2}=f(x)$

ومنه $x=\frac{1}{2}$ محور تماثل منحنى الدالة f .

مثال2 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$$f(x)=\frac{x^2-x}{x+1}$$

1. بين أن $\forall\in D_f\ f(x)=x-2+\frac{2}{x+1}$
2. بين أن النقطة $\Omega(-1;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

الجواب : 1) $x-2+\frac{2}{x+1}=\frac{(x-2)(x+1)+2}{x+1}=\frac{x^2-x}{x+1}=f(x)$

2) $\Omega(-1;-3)$ $\Omega(a;b)$

أ) نبين أنه : اذا كانت $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ فان : $-2-x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ ؟؟؟

$x\in\mathbb{R}-\{-1\}\Leftrightarrow x\ne -1 \Leftrightarrow -x\ne 1\Leftrightarrow -2-x\ne -2+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2-x\ne -1 \Leftrightarrow -2-x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

ب)نبين أن : $f(-2-x)+f(x)=-6=2b$ ؟؟؟؟

$f(-4-x)+f(x)=-4-x-1+\frac{1}{-4-x+2}+x-1+\frac{1}{x+2}$

$=-4-2+\frac{1}{-x-2}+\frac{1}{x+2}=-6+-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}=-6$

ومنه $\Omega(-2;-3)$ مركز تماثل منحنى الدالة f .

تمرين1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. أدرس زوجية الدالة f
3. أحسب نهايات الدالة f عند محدات D_f
4. أدرس الفروع اللانهاية لمنحنى الدالة f
5. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها
6. حدد جدول تغيرات الدالة f
7. حدد معادلة لمماس المنحني (C_f) الممثل للدالة f في النقطة A التي أفصولها $x_0=-1$
8. حدد نقط تقاطع المنحني (C_f) الممثل للدالة مع محوري المعلم.
9. حدد مطا ريف الدالة f اذا وجدت
10. أرسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم

أجوبة : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$ (1 $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2)أ) اذا كانت $x\in\mathbb{R}$ فان $-x\in\mathbb{R}$

ب) $f(-x)=\frac{1}{3}(-x)^3-4(-x)=-\frac{1}{3}x^3-4(-x)=-\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)=-f(x)$

ومنه f دالة فردية

3) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$

لأن نهاية دالة حدودية عند مالانهايةهي نهاية حدها الأكبر درجة

4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x^2=+\infty$

(C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{3}x^2=+\infty$

(C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $-\infty$

5) $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)'=\frac{1}{3}3\times x^2-4=x^2-4$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow x^2-2^2=0\Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=2$ أو $x=-2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

(6

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$16/3$	$\searrow$	$-16/3$	$\nearrow$	$+\infty$

7)معادلة لمماس ل (C_f) في النقطة A التي أفصولها $x_0=-1$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ و $f(-1)=\frac{11}{3}$ و $f'(-1)=-3$

$y=f(-1)+f'(-1)(x+1)\Leftrightarrow y=\frac{11}{3}-3(x+1)\Leftrightarrow y=-3x+\frac{2}{3}$

8) أ)نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $\frac{1}{3}x^3-4x=0$

يعني $x\left(\frac{1}{3}x^2-4\right)=0$ يعني $x=0$ أو $\frac{1}{3}x^2-4=0$

يعني $x=0$ أو $x^2=12$ يعني $x=0$ أو $x=\sqrt{12}$ أو $x=-\sqrt{12}$

يعني $x=0$ أو $x=2\sqrt{3}$ أو $x=-2\sqrt{3}$

ومنه نقط التقاطع هم : $A(2\sqrt{3};0)$ و $B(-2\sqrt{3};0)$ و $O(0;0)$

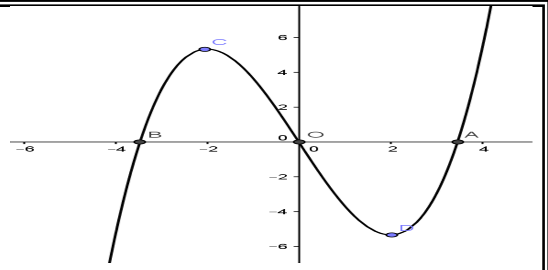
ب)نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$ لدينا $f(0)=0$ ومنه نقطة التقاطع هي: $O(0;0)$

9) $f(2)=-\frac{16}{3}$ هي قيمة دنيا للدالة f

$f(-2)=\frac{16}{3}$ هي قيمة قصوى للدالة f

9)التمثيل المبياني للدالة f



<u>تمرين2:</u>نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب: $g(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$

1. حدد حيز تعريف الدالة g .
2. أحسب نهايات الدالة g في محدات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.
3. أحسب الدلة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .
4. أنشئ منحنى الدالة g .

الحل:

1)حيز تعريف الدالة g هو:

$$D=\{x\in\mathbb{R}/x+1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-1\}$$

و منه $D=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f).

$\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2x+1}{x+1}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{2x+1}{x+1}=+\infty$

يعني المستقيم ذا العادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى.

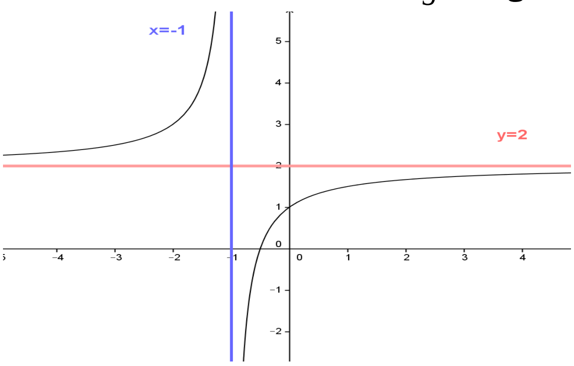
3)لكل x من D لدينا: $g'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

يعني: $(\forall x\in D)\ g'(x)>0$

<u>4)جدول تغيرات الدالة.</u>

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	‖	$\nearrow$	2

منحنى الدالة g .



<u>تمرين3:</u> نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$f(x)=\sqrt{4x^2+2x-2}$$

1. حدد D_f و حدد $f'(x)$
2. أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3. بين : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-2$ و أحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x$
4. أستنتج معادلة المقارب المائل لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$

أجوبة: (1 $D_f=\{x\in\mathbb{R}/4x^2+2x-2\geq 0\}$

$$2x^2+x-1=0 \Leftrightarrow 4x^2+2x-2=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times2\times(-1)=1+8=9=(3)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه الحدودية لها جذرين هما:

$x_1=\dfrac{-1+3}{2\times2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ **و** $x_2=\dfrac{-4}{4}=-1$ ومنه جدول الاشارة :

x	$-\infty$		-1		$1/2$		$+\infty$
$4x2+2x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه: $D_f=]-\infty;-1]\cup\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

$\forall x\in\ ]-\infty;-1[\cup\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

$$f'(x)=\left(\sqrt{4x^2+2x-2}\right)'=\frac{\left(4x^2+2x-2\right)'}{2\sqrt{4x^2+2x-2}}=\frac{8x+2}{2\sqrt{4x^2+2x-2}}=\frac{4x+1}{\sqrt{4x^2+2x-2}}$$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+2x-2}$

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^2+2x-2=\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^2=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+2x-2}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(4+\dfrac{2x}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}\right)}}{x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}}}{x}$$

لدينا : $x\to-\infty$ ومنه : $|x|=-x$ ومنه

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}=-\sqrt{4}=-2=a$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)+2x=\lim_{x\to\infty}\sqrt{4x^2+2x-2}+2x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+2x-2}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+2x-2}-2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+2x-2}-2x\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x-2-4x^2}{|x|\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}}-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-2}{-x\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}}-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-2}{-x\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}}-2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2-\dfrac{2}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}}+2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{2}{x}}{-\left(\sqrt{4+\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x^2}}+2\right)}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}=b$$

4)<u>ومنه</u> : $y=ax+b$ أي $y=-2x-\dfrac{1}{2}$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$