

ملخص درس النهايات

أجوبة (1):  $\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x - 6 = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 3^+} 3x + 1 = 9 + 1 = 10$

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$2x-6$	$-$	$0$	$+$

ومنه :  $\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x - 6 = 0^+$  و بالتالى :  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+1}{2x-6} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} 2x - 6 = 0^-$  و بالتالى :  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x+1}{2x-6} = -\infty$

(2) لدينا  $\lim_{x \rightarrow 2^+} 5x - 20 = -10$  و  $\lim_{x \rightarrow 2^+} -2x + 4 = 0$

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$-2x+4$	$+$	$0$	$-$

ومنه :  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x-20}{-2x+4} = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x-20}{-2x+4} = +\infty$

(5) العمليات على النهايات

فى كل ما يلى  $a$  عدد حقيقى أو يساوى  $+\infty$  أو  $-\infty$  و  $l$  و  $l'$  عدنان حقيقيان وهذه العمليات تبقى صالحة على اليمين و اليسار

(a) النهاية و الجمع:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x)$	$l'+l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	

(b) النهاية و الضرب:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x)$	$l'l$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد		

(c) النهاية و المقلوب:

$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$0^+$	$0^-$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g}\right)(x)$	$\frac{1}{l'}$	$0$	$0$	$+\infty$	$-\infty$

(d) النهاية و الخارج:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\neq 0$	$\infty$	$0$	$0$	$0^+$	$0^+$	$0^-$	$0^-$	$< 0$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	

الأشكال الغير محددة هي :  $\frac{0}{0}$  و  $\frac{\infty}{\infty}$  و  $0 \times \infty$  و  $(+\infty) + (-\infty)$

(6) نهاية الدالة الحدودية

نهاية دالة حدودية عندما تؤول  $x$  إلى  $+\infty$  أو إلى  $-\infty$

هي نهاية حدها الأكبر درجة

مثال :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 5x - 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$  الجواب:

(7) نهاية الدالة الجذرية

نهاية دالة جذرية عندما تؤول  $x$  إلى  $+\infty$  أو إلى  $-\infty$

هي خارج نهاية حدها الأكبر درجة.

(1) نهايات اعتيادية:  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  •  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$  •  $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$  •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  •  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$  •  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$  إذا كان  $n$  زوجي •  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$  إذا كان  $n$  فردي

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$  •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$  •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$  و تقرأ النهاية عندما يؤول  $x$  إلى  $0$  على اليمين

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$  و تقرأ النهاية عندما يؤول  $x$  إلى  $0$  على اليسار

(2) خاصية : لتكن  $f$  دالة عددية و  $l$  عددا حقيقيا

إذا كانت  $f$  تقبل نهاية  $l$  فى  $+\infty$  (أو فى  $-\infty$ ) فان هذه النهاية وحيدة.

(3) النهاية على اليمين و النهاية على اليسار لدالة فى نقطة

إذا كانت  $f(x)$  يؤول إلى  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليمين

فإننا نكتب : " $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ " أو " $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ "

إذا كانت  $f(x)$  يؤول إلى  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليسار

فإننا نكتب : " $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ " أو " $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ "

(4) نهايات اعتيادية:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$  •  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$  •  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$  •  $\forall n \in \mathbb{N}^* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

إذا كان  $n$  زوجي غير منعدم , فان  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

إذا كان  $n$  فردي غير منعدم , فان  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = -\infty$

مثال 1: أحسب النهايات التالية: (1)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3}$  (2)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-5}{x^3}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9}{x^5} + \infty$  (4)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-12}{x^4}$  (5)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}}$  (6)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

الأجوبة : (1)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$  (2)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-5}{x^3} = -\infty$  (3)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9}{x^5} + \infty$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-12}{x^4} = -\infty$  (5)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}} = -\infty$  (6)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 + 7 + \infty = +\infty$

مثال 2: أحسب النهايات التالية: (1)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+1}{2x-4}$  و  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+1}{2x-6}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x-20}{-2x+4}$  و  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x-20}{-2x+4}$

## 11 النهايات و الترتيب

**خصايات:** لتكن  $I$  مجالا من نوع  $[a; +\infty[$  حيث  $a \in \mathbb{R}$  و  $l \in \mathbb{R}$

لتكن  $f$  و  $U$  و  $V$  دوال عددية معرفة على المجال  $I$  اذا

■ اذا كانت  $\forall x \in I U(x) \leq f(x) \leq V(x)$  وكانت:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = +\infty$  فان:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

■ اذا كانت  $\forall x \in I f(x) \leq V(x)$  وكانت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

■ اذا كانت  $\forall x \in I U(x) \leq f(x) \leq V(x)$  وكانت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = l \quad \text{فان} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

**مثال:** أحسب النهاية التالية:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sin(x)$

**الجواب:** نعلم أن:  $\forall x \in \mathbb{R} -1 \leq \sin x \leq 1$

اذن:  $2x - 1 \leq \sin x + 2x \leq 1 + 2x$  اذن:  $2x - 1 \leq \sin x + 2x \leq 1 + 2x$

ونعلم أن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 1 = +\infty$  ومنه:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \sin(x) = +\infty$

**تمرين:** أحسب النهاية التالية:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$

**الجواب:** لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$

نتخلص عن شكل غ محدد من قبيل:  $+\infty - \infty$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق**:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1})^2 - x^2}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

لأن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x = +\infty$

دائما نتخلص عن شكل غ محدد من قبيل:  $\frac{\infty}{\infty}$

نعمل ب  $x^2$  داخل الجذر مربع وب  $x$  في البسط ونجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + x\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{1}{2}$$

**مثال:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6 - x^2 + 1}{x^4 + x - 4}$

الجواب:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6 - x^2 + 1}{x^4 + x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$

(8 نهاية الدوال اللاجذرية

خاصية: لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال على الشكل

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a; +\infty[$$

• إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  و  $l \geq 0$  فان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$

• إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  و  $l \geq 0$  فان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$

**أمثلة:** (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 + 4}$  (2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 7}$  (3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

**أجوبة:** (1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 + 4} = \sqrt{3 \times 2^2 + 4} = \sqrt{16} = 4$

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 7} = +\infty$  لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 7 = +\infty$  اذن:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 7} = +\infty$

(3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = 0$  لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1}-1 = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x-2 = 0$

نتخلص عن شكل غ محدد من قبيل:  $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م بالضرب **بالمرافق** ثم بالاختزال:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x-1})^2 - 1^2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1-1}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{1}{2}$$

(9 **مبرهنة:** لتكن  $f$  دالة عددية و  $l$  و  $a$  عددين حقيقيين

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \quad \text{يكافئ} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$$

**مثال:** نعتبر الدالة  $f$  المعرفة كالتالي:  $f(x) = \frac{|x|}{x} + x^4$

1. أحسب النهايات التالية:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

2. هل الدالة  $f$  تقبل نهاية عند:  $x_0 = 0$  ؟

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = 1 + x^4, x > 0 \\ f(x) = -1 + x^4, x < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{x}{x} + x^4, x > 0 \\ f(x) = \frac{x}{x} + x^4, x < 0 \end{array} \right.$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -1 + x^4 = -1$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 + x^4 = 1$

(2) نلاحظ أن:  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$

ومنه لدالة  $f$  لا تقبل نهاية عند:  $x_0 = 0$

(10 **نهاية الدوال المثلثية**

**خصايات:** •  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$  •  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$  •  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\forall a \in \mathbb{R}^* \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

أمثلة: أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 4x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\tan 3x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{4x}$$

**أجوبة:** (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\tan 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} \times \frac{6x}{\tan 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} \times \frac{3x}{\tan 3x} \times 2 = 1 \times 1 \times 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{2x} \times \frac{4x}{\sin 4x} \times \frac{2x}{4x} = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$