

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 1 = -1 \quad (2)$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0 = 0$ و $-1 = f'_g(0)$

وهو العدد المشتق على اليسار عند $x_0 = 0$

(3)

f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0 = 0$

ولكن $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$

(4) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0 = 0$.

$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$$

$$(\Delta_d): y = x \Leftrightarrow y = 0 + 1(x - 0) \Leftrightarrow y = f(0) + f'_d(0)(x - 0)$$

(5) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0 = 0$.

$$y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$$

$$(\Delta_g): y = -x \Leftrightarrow y = 0 - 1(x - 0) \Leftrightarrow y = f(0) + f'_g(0)(x - 0)$$

(6) لدينا $f'_d(0) \neq f'_g(0)$ النقطة $A(0; f(0))$ تسمى نقطة مزواة

تمرين 4: تعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = |x^2 - 1|$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0 = 1$

2. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0 = 1$

3. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 1$ ؟

4. حدد معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0 = 1$.

5. حدد معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0 = 1$.

6. كيف نسمي النقطة $A(1, f(1))$ ؟

الأجوبة: $f(x) = |x^2 - 1|$ ندرس إشارة:

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ أو } x = 1$$

$$\text{ومنه: } \begin{cases} f(x) = x^2 - 1; x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\\ f(x) = -(x^2 - 1); x \in [-1; 1] \end{cases} \text{ و } f(1) = |1^2 - 1| = 0$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	0

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2 \quad (1)$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = 1$ و $2 = f'_d(1)$

وهو العدد المشتق على اليمين عند $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+1) = -2 \quad (2)$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0 = 1$ و $-2 = f'_g(1)$

وهو العدد المشتق على اليسار عند $x_0 = 1$

(3)

تمرين 1: تعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = 5x^2$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة f عند $x_0 = 1$

$$\text{الجواب: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x^2 - 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x^2 - 1^2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 5(x+1) = 5 \times 2 = 10$$

ومنه f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 10 = f'(1) \text{ وهو العدد المشتق عند } x_0 = 1$$

تمرين 2: تعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = x^2 - 2x + 1$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 2$.

2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0 = 2$.

الأجوبة (1): $f(2) = 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$$

ومنه f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 1$

$f'(2) = 2$ وهو العدد المشتق عند $x_0 = 2$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$$

$$y = 2x - 3 \Leftrightarrow y = 1 + 2(x - 2) \Leftrightarrow y = f(2) + f'(2)(x - 2)$$

تمرين 3: تعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = x^3 + |x|$

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ (قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0 = 0$)

2. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ (قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0 = 0$)

3. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$ ؟

4. حدد معادلة لنصف مماس المنحنى الممثل للدالة f على اليمين عند

$x_0 = 0$

5. حدد معادلة لنصف مماس المنحنى الممثل للدالة f على اليسار عند

$x_0 = 0$

6. كيف نسمي النقطة $A(0, f(0))$ ؟

الأجوبة (1): $f(0) = 0^3 + |0| = 0$ و $\begin{cases} f(x) = x^3 + x; x \geq 0 \\ f(x) = x^3 - x; x \leq 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 1 = 1$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = 0$ و $1 = f'_d(0)$

وهو العدد المشتق على اليمين عند $x_0 = 0$

$(u^n)' = nu^{n-1} \times u'$: نستعمل القاعدة التالية: $f(x) = (3x+4)^3$ (14)

$$f'(x) = ((3x+4)^3)' = 3 \times (3x+4)^{3-1} \times (3x+4)' = 3 \times 3 \times (3x+4)^{3-1} = 9(3x+4)^2$$

(15) نستعمل القاعدة التالية: $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x) = (\sqrt{x^2+1})' = \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

تمرين 6: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

$$f(x) = 2x^3 \quad (3) \quad f(x) = 7x+15 \quad (2) \quad f(x) = 11 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - 4x - 6 \quad (5) \quad f(x) = 4x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1 \quad (4)$$

$$f(x) = \cos 2x + 3\sin 3x \quad (8) \quad f(x) = 4\sqrt{x} - 1 \quad (7) \quad f(x) = \frac{3}{x} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{1}{5x+7} \quad (10) \quad f(x) = (3x^2+2)(7x+1) \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} \quad (13) \quad f(x) = \frac{7x}{x^3+1} \quad (12) \quad f(x) = \sqrt{x^2+8x} \quad (11)$$

$$f(x) = (2x-1)^7 \quad (15) \quad f(x) = \frac{4x-3}{2x-1} \quad (14)$$

$$f'(x) = (7x+15)' = 7 \quad (2) \quad f'(x) = (11)' = 0 \quad (1) \quad \text{أجوبة:}$$

$$f'(x) = (2x^3)' = 2 \times 3x^{3-1} = 6x^2 \quad (3)$$

$$f'(x) = (4x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1)' = 4 \times 4x^{4-1} - \frac{1}{3} \times 3x^{3-1} - 1 + 0 = 16x^3 - x^2 - 1 \quad (4)$$

$$f'(x) = (\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - 4x - 6)' = \frac{1}{5} \times 5x^{5-1} - \frac{1}{4} \times 4x^{4-1} - 4 + 0 = x^4 - x^3 - 4 \quad (5)$$

$$f'(x) = (\frac{3}{x})' = (3 \times \frac{1}{x})' = 3 \times (-\frac{1}{x^2}) = -\frac{3}{x^2} \quad (6)$$

$$f'(x) = (4\sqrt{x} - 1)' = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x} \quad (7)$$

$$f'(x) = (\cos 2x + 3\sin 3x)' = -2\sin 2x + 3 \times 3\cos 3x = -2\sin 2x + 9\cos 3x \quad (8)$$

$$f(x) = (3x^2+2)(7x+1) \quad (9)$$

نستعمل القاعدة التالية: $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f'(x) = ((3x^2+2) \times (7x+1))' = (3x^2+2)' \times (7x+1) + (3x^2+2) \times (7x+1)'$$

$$f'(x) = 6x \times (7x+1) + 7(3x^2+2) = 42x^2 + 6x + 21x^2 + 14 = 63x^2 + 6x + 14$$

(10) نستعمل القاعدة التالية: $(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x) = (\frac{1}{5x+7})' = -\frac{(5x+7)'}{(5x+7)^2} = -\frac{5}{(5x+7)^2}$$

(11) نستعمل القاعدة التالية: $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x) = (\sqrt{x^2+8x})' = \frac{(x^2+8x)'}{2\sqrt{x^2+8x}} = \frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x}} = \frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$$

(12) نستعمل القاعدة التالية: $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f(x) = \frac{7x}{x^3+1} \quad (12)$$

f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0 = 1$

ولكن: $f'_d(1) \neq f'_g(1)$

ومنه: f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 1$

(4) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليمين عند $x_0 = 1$.

$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$$

$$(\Delta_d): y = 2x - 4 \Leftrightarrow y = 0 + 2(x - 2) \Leftrightarrow y = f(1) + f'_d(1)(x - 1)$$

(5) معادلة لنصف مماس منحنى الدالة f على اليسار عند $x_0 = 0$.

$$y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$$

$$(\Delta_g): y = -2x + 2 \Leftrightarrow y = 0 - 2(x - 1) \Leftrightarrow y = f(1) + f'_g(1)(x - 1)$$

(6) لدينا $f'_d(1) \neq f'_g(1)$ النقطة: $A(1; f(1))$ تسمى نقطة مزواة

تمرين 5: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

$$f(x) = x^{10} \quad (3) \quad f(x) = 3x - 5 \quad (2) \quad f(x) = 2 \quad (1)$$

$$f(x) = 6\sqrt{x} - 4 \quad (6) \quad f(x) = \frac{5}{x} \quad (5) \quad f(x) = 4x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1 \quad (4)$$

$$f(x) = \cos(7x+2) \quad (8) \quad f(x) = 6x^4 - \cos x + 3\sin x \quad (7)$$

$$f(x) = 3\tan x - 1 \quad (10) \quad f(x) = \frac{4}{5}\sin(5x+4) \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} \quad (12) \quad f(x) = x \cos x \quad (11)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} \quad (15) \quad f(x) = (3x+4)^3 \quad (14) \quad f(x) = \frac{3x-1}{x+2} \quad (13)$$

أجوبة: (1) $f'(x) = (2)' = 0$ (2) $f'(x) = (3x-5)' = 3$

$$f'(x) = (x^{10})' = 10x^{10-1} = 10x^9 \quad (3)$$

$$f'(x) = (4x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1)' = 4 \times 3x^{3-1} - \frac{1}{2} \times 2x - 0 = 12x^2 - x \quad (4)$$

$$f'(x) = (\frac{5}{x})' = (5 \times \frac{1}{x})' = 5 \times (-\frac{1}{x^2}) = -\frac{5}{x^2} \quad (5)$$

$$f'(x) = (6\sqrt{x} - 4)' = 6 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{x} \quad (6)$$

$$f'(x) = (6x^4 - \cos x + 3\sin x)' = 6 \times 4x^3 + \sin x + 3\cos x = 24x^3 + \sin x + 3\cos x$$

$$f'(x) = \cos(7x+2)' = -7 \times \sin(7x+2) \quad (8)$$

$$f'(x) = \frac{4}{5}\sin(5x+4)' = 5 \times \frac{4}{5} \times \cos(5x+4) = 4 \times \cos(5x+4) \quad (9)$$

$$f'(x) = (3\tan x - 1)' = 3 \times (1 + \tan^2 x) - 0 = 3 \times (1 + \tan^2 x) \quad (10)$$

(11) نستعمل القاعدة التالية: $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

$$f'(x) = (x \times \cos x)' = x' \times \cos x + x \times \cos' x = 1 \times \cos x - x \times \sin x = \cos x - x \sin x$$

(12) نستعمل القاعدة التالية: $(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x) = (\frac{1}{2x+1})' = -\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2} = -\frac{2}{(2x+1)^2}$$

(13) نستعمل القاعدة التالية: $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f'(x) = (\frac{3x-1}{x+2})' = \frac{(3x-1)'(x+2) - (3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{3(x+2) - 1 \times (3x-1)}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$$

ندرس إشارة : $f'(x)$ ونحدد جدول التغيرات

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

f' تتعدم في 3 و تتغير إشارتها اذن $f(3) = -8$ مطراف للدالة f وبالضبط قيمة دنيا للدالة f

تمرين 10: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = 2x^2 + x + 1$

(1) حدد D_f (2) أحسب نهايات f عند محددات D_f

(3) أحسب مشتقة الدالة f و أدرس اشارتها (4) حدد جدول تغيرات f

(5) حدد معادلة لمماس منحى الدالة f في النقطة الذي أفصولها $x_0 = 1$

(6) حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

(7) حدد مطاريف الدالة f ان وجدت

(8) أرسم (C_f) في معلم متعامد ممنظم

الأجوبة: $f(x) = 2x^2 + x + 1$

(1) الدالة f حدودية اذن $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 + x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (2x^2 + x + 1)' = 4x + 1$$

$$f'(x) = 0 \text{ يعني } 4x + 1 = 0 \text{ يعني } x = -\frac{1}{4}$$

ندرس إشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

(4) جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (5)$$

$$y = 5x - 21 \Leftrightarrow y = 4 + 5(x - 5) \Leftrightarrow y = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

$$\text{لأن : } f(1) = 4 \text{ و } f'(1) = 5$$

(6) (أ) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور

الأفصائل نحل فقط المعادلة : $f(x) = 0$ يعني $2x^2 + x + 1 = 0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$$a = 2 \text{ و } b = 1 \text{ و } c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0$$

ومنه هذه المعادلة ليس لها حل: وبالتالي التمثيل المبياني

لا يقطع محور الأفصائل

(ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتاب

نحسب فقط : $f(0)$

$$f'(x) = \left(\frac{7x}{x^3+1} \right)' = \frac{(7x)'(x^3+1) - 7x(x^3+1)'}{(x^3+1)^2} = \frac{7(x^3+1) - 7x \times 3x^2}{(x^3+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{7x^3 + 7 - 21x^3}{(x^3+1)^2} = \frac{7 - 14x^3}{(x^3+1)^2}$$

$$\left(\frac{1}{u} \right)' = -\frac{u'}{u^2} \text{ نستعمل القاعدة التالية : } f(x) = \frac{1}{\sin x} \quad (13)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sin x} \right)' = -\frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2} = -\frac{\cos x}{(\sin x)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ نستعمل القاعدة التالية : } f(x) = \frac{4x-3}{2x-1} \quad (14)$$

$$f'(x) = \left(\frac{4x-3}{2x-1} \right)' = \frac{(4x-3)'(2x-1) - (4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{4(2x-1) - 2 \times (4x-3)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(2x-1) - 2 \times (4x-3)}{(2x-1)^2} = \frac{8x - 4 - 8x + 6}{(2x-1)^2} = \frac{2}{(2x-1)^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1} \times u' \text{ نستعمل القاعدة التالية : } f(x) = (2x-1)^7 \quad (15)$$

$$f'(x) = \left((2x-1)^7 \right)' = 7 \times (2x-1)^{7-1} \times (2x-1)' = 14(2x-1)^6$$

تمرين 7: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 2$

أحسب المشتقة الأولى و الثانية و الثالثة

$$f'(x) = (x^3 - 5x^2 + 4x - 2)' = 3x^2 - 5 \times 2x + 4 - 0 = 3x^2 - 10x + 4 \quad \text{الجواب:}$$

$$f''(x) = (3x^2 - 10x + 4)' = 6x - 10 \text{ و } f'''(x) = (6x - 10)' = 6$$

تمرين 8: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^2 + 2x - 2$

(1) حدد D_f (2) أحسب نهايات f عند محددات D_f

(3) أدرس تغيرات f حدد جدول تغيرات

الجواب: (1) الدالة f حدودية اذن $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (x^2 + 2x - 2)' = 2x + 2$$

$$f'(x) = 0 \text{ يعني } 2x + 2 = 0 \text{ يعني } x = -1$$

ندرس إشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

• اذا كانت : $x \in [-1; +\infty[$ فان : $f'(x) \geq 0$ ومنه f تزايدية

• اذا كانت : $x \in]-\infty; -1]$ فان : $f'(x) \leq 0$ ومنه f تناقصية

(4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

تمرين 9: حدد مطاريف الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^2 - 6x + 1$

$$f'(x) = (x^2 - 6x + 1)' = 2x - 6 \text{ و } D_f = \mathbb{R} \quad \text{الجواب:}$$

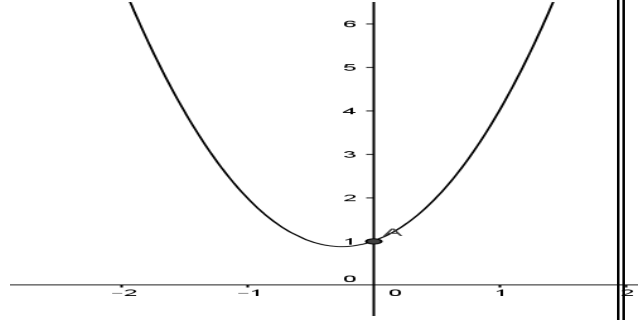
$$f'(x) = 0 \text{ يعني } 2x - 6 = 0 \text{ يعني } x = 3$$

$f(0) = 1$ ومنه نقطة التقاطع هي: $A(0;1)$

(7) الدالة تقبل قيمة دنيا هي: $\frac{7}{8}$

2-	-1	-1/4	0	1	2
7	2	7/8	1	4	11

(8) رسم: C_f



تمرين 11: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = x^2 + 4x + 3$

(1) حدد D_f (2) أحسب نهايات f عند محددات D_f

(3) أحسب مشتقة الدالة f و أدرس اشارتها (4) حدد جدول تغيرات f

(5) حدد معادلة لمماس منحنى الدالة f في النقطة الذي أفصولها $x_0 = -1$

(6) حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

(7) حدد مطايف الدالة f ان وجدت

(8) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f و المستقيم (D) الذي

معادلته $y = 3$: (D) في معلم متعامد ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

(9) حدد نقط تقاطع (C_f) و (D) .

(10) حل مبيانيا في \mathbb{R} المتراجحة $x^2 + 4x \geq 0$.

الأجوبة: $f(x) = x^2 + 4x + 3$

(1) الدالة f حدودية اذن $D_f = \mathbb{R}$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 4x + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 4x + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

(3) $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (x^2 + 4x + 3)' = 2x + 4$

$f'(x) = 0$ يعني $2x + 4 = 0$ يعني $x = -2$

ندرس إشارة: $f'(x)$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$2x+4$	$-$	0	$+$

إذا كانت: $x \in [-2; +\infty[$ فان: $f'(x) \geq 0$ ومنه f تزايديه

إذا كانت: $x \in]-\infty; -2]$ فان: $f'(x) \leq 0$ ومنه f تناقصية

(4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

(5) $x_0 = -1$ $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$y = 2x + 2 \Leftrightarrow y = 2(x + 1) \Leftrightarrow y = f(-1) + f'(-1)(x + 1)$

لأن: $f(1) = 0$ و $f'(1) = 2$

(6) تحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل

نحل المعادلة: $f(x) = 0$ يعني $x^2 + 4x + 3 = 0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a = 1$ و $b = 4$ و $c = 3$

$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4 = (2)^2 > 0$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{-4 - 2}{2 \times 1} = -3$ و $x_1 = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{-4 + 2}{2 \times 1} = -1$

ومنه نقط التقاطع هم: $A(-1; 0)$ و $B(-3; 0)$

(ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتايب

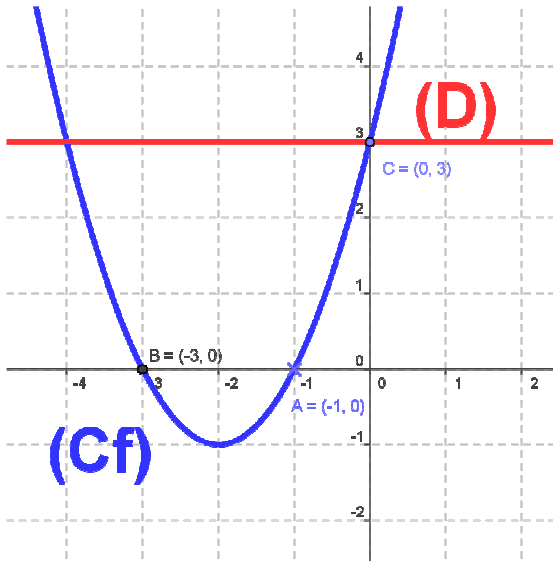
نحسب فقط: $f(0)$

$f(0) = 3$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0; 3)$

(7) الدالة تقبل قيمة دنيا هي: -1

(8) رسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f و المستقيم (D) : $y = 3$

x	-4	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	3	0	-1	0	3	8



(9) تحديد نقط تقاطع (C_f) و (D) .

نحل المعادلة: $f(x) = y$ يعني $x^2 + 4x + 3 = 3$

يعني $x^2 + 4x = 0$ يعني $x(x + 4) = 0$ يعني $x = 0$ أو $x = -4$

يعني $x = 0$ أو $x = -4$

ومنه نقط التقاطع هم: $E(0; 3)$ و $F(-4; 3)$

(10) $x^2 + 4x + 3 \geq 3 \Leftrightarrow x^2 + 4x \geq 0$

$f(x) \geq y \Leftrightarrow$ منحنى الدالة (C_f) يوجد فوق المستقيم (D)

ومنه: $S = [-4; 0]$

$f(0) = 3$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;3)$

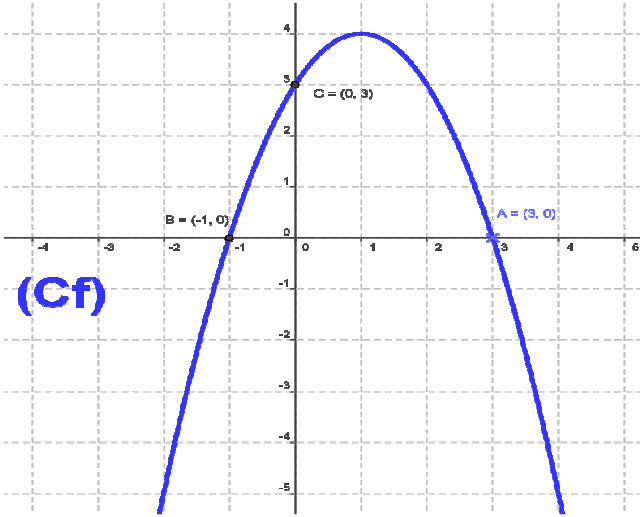
$$x_0 = 2 \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (7)$$

$$y = -2x + 7 \Leftrightarrow y = 3 - 2(x - 2) \Leftrightarrow y = f(2) + f'(2)(x - 2)$$

$$\text{لأن: } f(2) = 3 \text{ و } f'(2) = -2$$

(8) رسم: C_f

x	-2	-1	0	1	2	3	4
f(x)	-5	0	3	4	3	0	-5



تمرين 13: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كالتالي:

$$g(x) = |x|(x-1) \quad \text{و} \quad \begin{cases} f(x) = x^2 + 2x; x \leq 1 \\ f(x) = -\frac{2}{x} + 5; x > 1 \end{cases}$$

(1) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار عند $x_0 = 1$

(2) هل الدالة f قابلة للاشتقاق؟

(3) أدرس قابلية اشتقاق الدالة g عند $x_0 = 0$

الجواب: $f(1) = 1^2 + 2 \times 1 = 3$ و $\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x; x \leq 1 \\ f(x) = -\frac{2}{x} + 5; x > 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{4}{x} + 5 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\frac{4}{x} + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-4 + 2x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-4 + 2x}{x - 1} \times \frac{1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-4 + 2x}{x - 1} \times \frac{1}{x - 1} = -\infty$$

ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

نحصل عن شكل غ محدد من قبيل: $\frac{0}{0}$

نتخلص من ال ش غ م مثلا بالتعميل ثم بالاختزال:

نلاحظ أن: 1 جذر للحدودية $x^2 + 2x - 3$

اذن: هي تقبل القسمة على: $x - 1$

وباستعمال تقنية القسمة الاقليدية نجد أن: $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x + 3)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 3 = 4$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0 = 1$ و $4 = f'_g(1)$

(2) f غير قابلة للاشتقاق على اليمين

ومنه: f غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 1$

تمرين 12: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

(1) حدد مجموعة تعريف الدالة f

(2) أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(3) أحسب مشتقة الدالة f وأدرس اشارة

(4) حدد جدول تغيرات الدالة f .

(5) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفصيل.

(6) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتيب.

(7) حدد معادلة لمماس منحنى الدالة f في النقطة الذي أفصولها $x_0 = 2$

(8) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

الأجوبة:

(1) الدالة f حدودية اذن $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 + 2x + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 + 2x + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)' = -2x + 2$$

$$f'(x) = 0 \text{ يعني } -2x + 2 = 0 \text{ يعني } x = 1$$

ندرس اشارة: $f'(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$-2x+2$	+	0	-

• اذا كانت: $x \in [1; +\infty[$ فان: $f'(x) \leq 0$ ومنه f تناقصية

• اذا كانت: $x \in]-\infty; 1]$ فان: $f'(x) \geq 0$ ومنه f تزايدية

(4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	4	$-\infty$

(5)

تحديد نقط التقاطع مع محور الأفصيل نحل المعادلة:

$$f(x) = 0 \text{ يعني } -x^2 + 2x + 3 = 0$$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$$a = -1 \text{ و } b = 2 \text{ و } c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 = (4)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{-2} = 3 \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{-2} = -1$$

ومنه نقط التقاطع هم: $A(-1; 0)$ و $B(3; 0)$

(6) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتيب

نحسب فقط: $f(0)$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 4 + 24 = 28 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{7}}{2} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{2 + \sqrt{28}}{2 \times 2} = \frac{2 + \sqrt{4 \times 7}}{2 \times 2} = \frac{2 + 2\sqrt{7}}{2 \times 2} = \frac{1 + \sqrt{7}}{2}$$

ومنه نقط التقاطع هم: $A\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}; 0\right)$ و $B\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}; 0\right)$

(6) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتايب

نحسب فقط: $f(0)$

$f(0) = -3$ ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0; -3)$

$$x_0 = -3 \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (7)$$

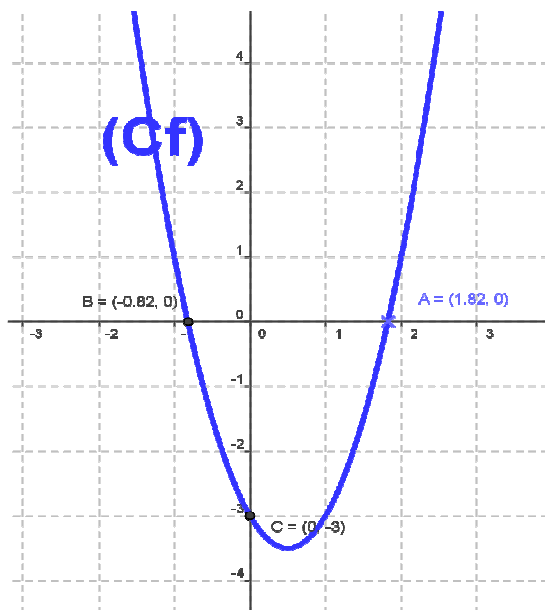
$$y = f(-3) + f'(-3)(x + 3)$$

$$y = -14x + 21 \Leftrightarrow y = 21 - 14(x + 3)$$

لأن: $f(-3) = 21$ و $f'(-3) = -14$

(8) رسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة

x	-2	-1	0	1/2	1	2	3
f(x)	9	1	-3	-7/2	-3	1	9



تمرين 15: حل المعادلة التفاضلية التالية: $y'' + 16y = 0$

الجواب: $y'' + 4^2 y = 0 \Leftrightarrow y'' + 16y = 0$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + 16y = 0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي:

$y: x \rightarrow \alpha \cos 4x + \beta \sin 4x$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

تمرين 16: حل المعادلات التفاضلية التالية: (1) $y'' + 4y = 0$

$$(2) \quad y'' + 8y = 0 \quad (3) \quad y'' + y = 0 \quad (4) \quad 9y'' + 16y = 0$$

الجواب: (1) $y'' + 2^2 y = 0 \Leftrightarrow y'' + 4y = 0$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي:

$y: x \rightarrow \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} g(x) = x(x-1); x \geq 0 \\ g(x) = -x(x-1); x \leq 0 \end{cases} \quad g(0) = 0 \quad \text{و} \quad g(x) = |x|(x-1) \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-1) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 = -1$$

ومنه g قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = 0$ و $-1 = f'_d(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x(x-1) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x + 1 = 1$$

ومنه g قابلة للاشتقاق على اليسار عند $x_0 = 0$ و $-1 = g'_g(0)$

g قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار عند $x_0 = 0$

ولكن: $g'_d(0) \neq g'_g(0)$

ومنه: g غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$

تمرين 14: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = 2x^2 - 2x - 3$

(1) حدد مجموعة تعريف الدالة f

(2) أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(3) أحسب مشتقة الدالة f وأدرس اشارتها

(4) حدد جدول تغيرات الدالة f .

(5) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل.

(6) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأرتايب.

(7) حدد معادلة لمماس منحنى الدالة f في النقطة الذي أفصولها $x_0 = -3$

(8) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

الأجوبة: (1) الدالة f حدودية إذن $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 - 2x - 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 - 2x - 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = (2x^2 - 2x - 3)' = 4x - 2 \quad (3)$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{يعني} \quad 4x - 2 = 0 \quad \text{يعني} \quad f'(x) = 0$$

ندرس إشارة: $f'(x)$

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$4x-2$	-	0	+

إذا كانت: $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ فإن: $f'(x) \geq 0$ ومنه f تزايدية

إذا كانت: $x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ فإن: $f'(x) \leq 0$ ومنه f تناقصية

(4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{7}{2}$	$+\infty$

(5) تحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل

نحل المعادلة: $f(x) = 0$ يعني $2x^2 - 2x - 3 = 0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$$c = -3 \quad \text{و} \quad b = -2 \quad \text{و} \quad a = 2$$

الدالة المشتقة f'	لدالة
$f'(x) = 0$	$f(x) = k$
$f'(x) = 1$	$f(x) = x$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax$
$f'(x) = a$	$f(x) = ax + b$
$f'(x) = nx^{n-1} \quad n \in \mathbb{Z}^*$	$f(x) = x^n$
$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x}$
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x}$
$f'(x) = -\sin x$	$f(x) = \cos x$
$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \sin x$
$f'(x) = -a \sin(ax+b)$	$f(x) = \cos(ax+b)$
$f'(x) = a \cos(ax+b)$	$f(x) = \sin(ax+b)$
$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$f(x) = \tan x$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe. c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien



$$: y'' + (2\sqrt{2})^2 y = 0 \Leftrightarrow y'' + 8y = 0 \quad (2)$$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + 8y = 0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y: x \rightarrow \alpha \cos 2\sqrt{2}x + \beta \sin 2\sqrt{2}x$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

$$: y'' + y = 0 \Leftrightarrow y'' + 1^2 y = 0 \quad (3)$$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + y = 0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y: x \rightarrow \alpha \cos x + \beta \sin x$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

$$: y'' + \left(\frac{4}{3}\right)^2 y = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{16}{9} y = 0 \Leftrightarrow 9y'' + 16y = 0 \quad (4)$$

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + 8y = 0$

هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y: x \rightarrow \alpha \cos \frac{4}{3}x + \beta \sin \frac{4}{3}x$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

ملخص لمشتقة بعض الدوال ولعمليات على الدوال المشتقة

الدالة المشتقة f'	الدالة
$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$f(x) = \tan x$
$f'(x) = u' + v'$	$f(x) = u + v$
$f'(x) = u' - v'$	$f(x) = u - v$
$f'(x) = k.u'$	$f(x) = k.u$
$f'(x) = u' \times v + u \times v'$	$f(x) = u \times v$
$f'(x) = nu^n \times u'$	$f(x) = u^n$
$f'(x) = -\frac{u'}{u^2}$	$f(x) = \frac{1}{u}$
$f'(x) = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	$f(x) = \frac{u}{v}$
$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$f(x) = \sqrt{u}$