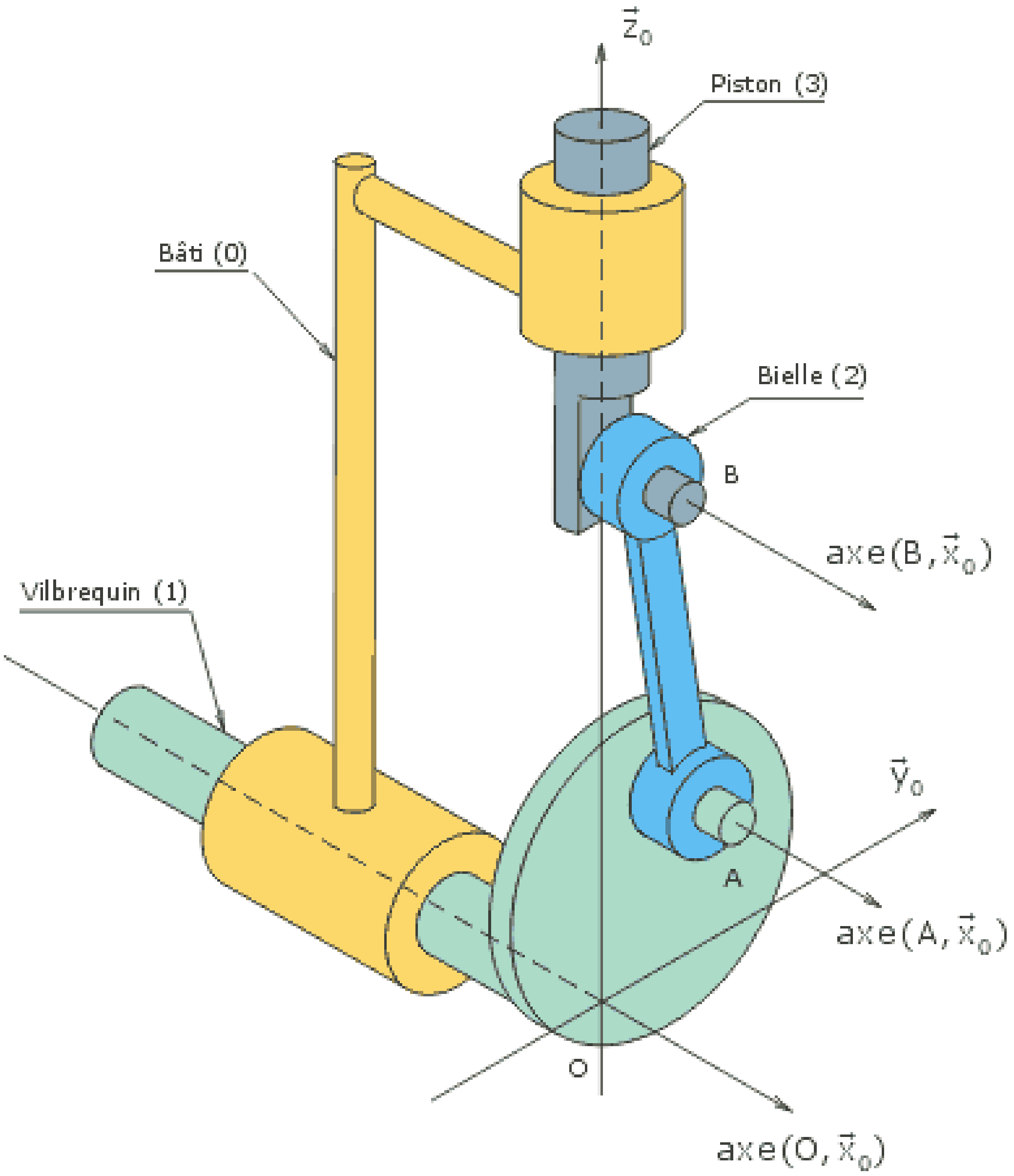
Enoncé

On étudie le mouvement plan d'un système bielle/manivelle , constitué d'un vilebrequin (1), d'une bielle (2), d'un piston (3) et d'un bâti (0). Le mouvement de rotation continu du vilebrequin par rapport au bâti est transformé en mouvement rectiligne alternatif du piston par rapport au bâti. Les liaisons entre les différents éléments sont les suivantes :

- $Liaison\ pivot\ d'axe\left(O,\vec{x}_0\right)$ $entre\ (0)\ et\ (1)$
- $Liaison\ pivot\ d'axe\left(A,\vec{x}_0\right)$ $entre\ (1)\ et\ (2)$
- $Liaison\ pivot\ d'axe\left(B,\vec{x}_0\right)$ $entre\ (2)\ et\ (3)$
- $Liaison\ pivot\ glissant\ d'axe\left(O,\vec{z}_0\right)$ $entre\ (3)\ et\ (0)$



On donne de plus :

$\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = e.\vec{y}_1 \quad \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = l\,\vec{z}_2 \quad \vec{\Omega}_{1/0} = \omega_{1/0}.\vec{x}_0 \quad \vec{V}(M \in 3/0) = \dot{z}\,\vec{z}_0$

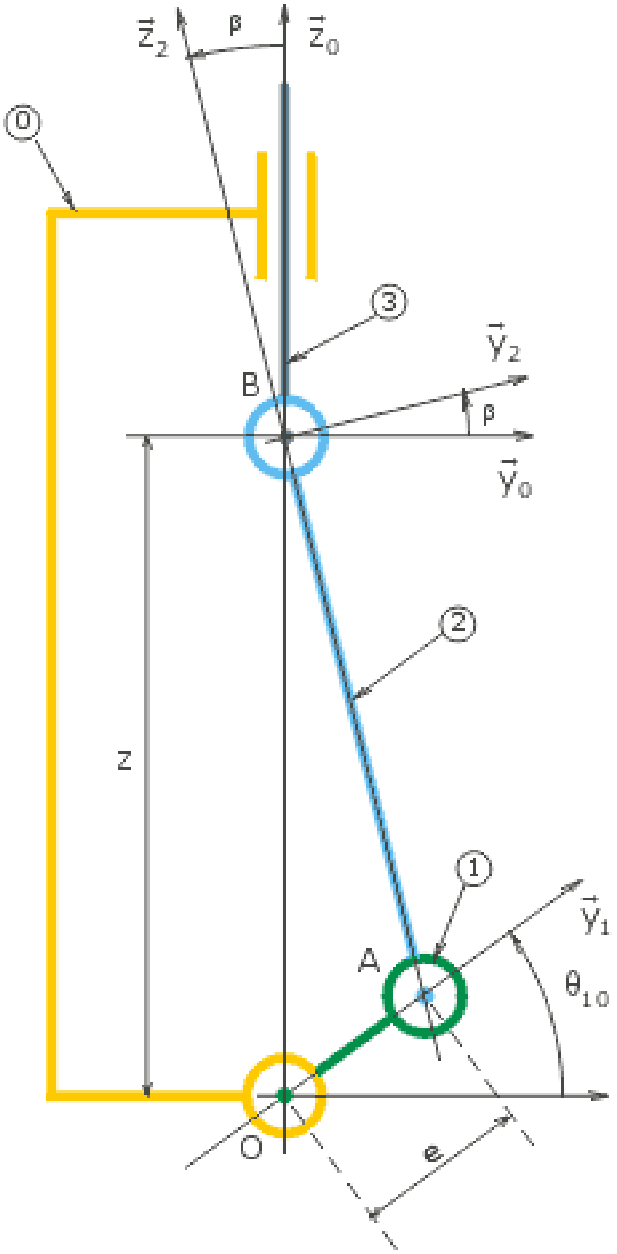
1 A partir des données et de la figure précédente, réaliser le schéma cinématique paramétré du mécanisme dans une position quelconque.

2 Déterminer alors la relation géométrique liant le paramètre d'entrée θ_{10} tel que $\omega_{1/0} = \dfrac{d\theta_{10}}{dt}$ et celui de sortie : z .

3 En supposant alors que $e << l$ et que $\omega_{1/0} = \dfrac{d\theta_{10}}{dt} = cte$, déterminer alors la vitesse de déplacement du piston (3) ainsi que son accélération par rapport au bâti (0).

Solution

1 Le schéma cinématique paramétré est le suivant :



2 Posons $\overrightarrow{OB} = z.\vec{z}_0$. En réalisant la fermeture géométrique : $\overrightarrow{OO} = \underbrace{\overrightarrow{OA}}_{e.\vec{y}_1} + \underbrace{\overrightarrow{AB}}_{l.\vec{z}_2} + \underbrace{\overrightarrow{BO}}_{-z.\vec{z}_0} = \vec{0}$ et

par projection suivant les axes $\vec{y}_0$ et $\vec{z}_0$ il vient :

$$/\vec{y}_0 \quad e.\underbrace{\vec{y}_1.\vec{y}_0}_{\cos\theta_{10}} + l.\underbrace{\vec{z}_2.\vec{y}_0}_{-\sin\beta} - z.\underbrace{\vec{z}_0.\vec{y}_0}_{0} = 0 \quad \Rightarrow \quad e.\cos\theta_{10} = l.\sin\beta$$

$$/\vec{z}_0 \quad e.\underbrace{\vec{y}_1.\vec{z}_0}_{\sin\theta_{10}} + l.\underbrace{\vec{z}_2.\vec{z}_0}_{\cos\beta} - z.\underbrace{\vec{z}_0.\vec{z}_0}_{1} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = e.\sin\theta_{10} + l.\cos\beta$$

Par combinaison de ces deux relations, on obtient la relation entre θ_{10} et z :

$$\boxed{z = e.\sin\theta_{10} + \sqrt{l^2 - l^2.\sin^2\beta} = e.\sin\theta_{10} + \sqrt{l^2 - e^2.\cos^2\theta_{10}}}$$

3 Pour déterminer la vitesse de déplacement du piston par rapport au bâti, comme le piston a un mouvement de translation suivant l'axe $(O, \vec{z}_0)$, il suffit de déterminer la vitesse en un point quelconque lié au piston (3). La vitesse peut être donc déterminée en B. Nous avons alors :

$$\vec{V}(B \in 3/0) = \dot{z}.\vec{z}_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_{R_0} = \left.\frac{d\left(e.\sin\theta_{10} + \sqrt{l^2 - e^2.\cos^2\theta_{10}}\right).\vec{z}_0}{dt}\right)_{R_0}$$

$$\vec{V}(B \in 3/0) = \omega_{1/0}.\left(e.\cos\theta_{10} - \frac{1}{2}.\frac{2.\left(e^2.\cos\theta_{10}\right).\left(-\sin\theta_{10}\right)}{\sqrt{l^2 - e^2.\cos^2\theta_{10}}}\right).\vec{z}_0$$

On a donc :

$$\boxed{\vec{V}(B \in 3/0) = \omega_{1/0} \cdot \left(e.\cos\theta_{10} + \frac{e^2.\cos\theta_{10}.\sin\theta_{10}}{\sqrt{l^2 - e^2.\cos^2\theta_{10}}} \right) . \vec{z}_0}$$

Dans le cas $e << l$, la relation précédente devient :

$$\boxed{\vec{V}(B \in 3/0) = \omega_{1/0} . e.\cos\theta_{10} . \vec{z}_0} \; .$$

Par dérivation de la relation précédente nous obtenons l'accélération :

$$\boxed{\vec{\Gamma}(B \in 3/0) = -\omega^2_{1/0} . e.\sin\theta_{10} . \vec{z}_0}$$