## A.II. Cinématique du point

Avant d'aborder les mouvements de solides indéformables et les relations entre la vitesse de leurs points, nous allons voir comment calculer position, vitesse et accélération d'un point dans l'espace. Nous nous limiterons à l'application de la cinématique du point dans un repère cartésien.

### A.II.1 Position

#### A.II.1.a Définition usuelle

Soit une pièce 0 contenant le point fixe $O$. Soit le repère $R_0(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ associé à la pièce 0.

Soit $M(t)$ un point mobile de l'espace de coordonnées $\left(X_M(t), Y_M(t), Z_M(t)\right)$ dans le repère $R_0$. On notera $(X_M, Y_M, Z_M)$ les coordonnées de $M$ par commodité.

Le vecteur position définissant la position du point $M$ dans le repère $R_0$ est noté $\overrightarrow{OM}$ et est défini tel que :

$$\overrightarrow{OM} = X_M\overrightarrow{x_0} + Y_M\overrightarrow{y_0} + Z_M\overrightarrow{z_0}$$

#### A.II.1.b Définitions courantes

Ajoutons aux éléments du paragraphe précédent un point $A$ fixe dans 0 et le repère $R_0'(A, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$

On peut parfaitement définir la position de $M$ dans ce second repère $R_0'$ :

$$\overrightarrow{AM} = X_M'\overrightarrow{x_0} + Y_M'\overrightarrow{y_0} + Z_M'\overrightarrow{z_0}$$

On pourra donc définir le vecteur position en fonction d'un quelconque point fixe de la pièce par rapport à laquelle on positionne le point $M$.

### A.II.2 Vitesse

#### A.II.2.a Définition

La vitesse instantanée du point $M$ dans la base $\mathfrak{B}_0$ notée $\vec{V}(M/0)$ est la dérivée par rapport au temps et par rapport à la base $\mathfrak{B}_0$ de tout vecteur position $\overrightarrow{OM}$ :

$$\boxed{\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_0}$$

$$\vec{V}(M/0) = \frac{dX_M}{dt}\overrightarrow{x_0} + \frac{dY_M}{dt}\overrightarrow{y_0} + \frac{dZ_M}{dt}\overrightarrow{z_0}$$

$$\vec{V}(M/0) = \dot{X}_M\overrightarrow{x_0} + \dot{Y}_M\overrightarrow{y_0} + \dot{Z}_M\overrightarrow{z_0}$$

### A.II.2.b Calcul courant

Quel que soit le point du repère choisit afin d'exprimer le vecteur position, on obtient la vitesse d'un point $M$ par rapport à la base $\mathfrak{B}_0$ en dérivant un vecteur $\overrightarrow{PM}$ avec $P$ fixe dans $R_0$ :

$$\boxed{\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_0 \quad P\ fixe\ dans\ R_0}$$

Démonstration :

$$\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_0$$

D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$$

$$\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}\right)}{dt}\right)_0$$

Par linéarité de la dérivée, on a :

$$\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_0 + \left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_0$$

Les points $O$ et $P$ étant fixes dans $R_0$, $\overrightarrow{OP}$ l'est aussi, d'où :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_0 = 0$$

On en déduit le résultat :

$$\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_0$$

Conclusion : on peut dériver tout vecteur position partant d'un point $P$ fixe de la pièce 0 :

$$\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_0$$

### A.II.2.c Démarche de calcul et exemple

#### *A.II.2.c.i Méthode*

Le calcul d'une vitesse par dérivation du vecteur position doit être effectué dans le bon ordre :

- Décomposer le vecteur position avec la relation de Chasles afin de passer par toutes les liaisons du mécanisme présentes entre les deux points du vecteur dérivé. Il peut parfois y avoir plusieurs relations de Chasles possibles.
- Exprimer chaque « petit vecteur » en fonction des paramètres géométriques et des vecteurs des bases liées à chaque pièce, et surtout, ne pas les projeter (sauf si demandé)
- Appliquer la formule de changement de base de dérivation
- Calculer les produits vectoriels
- Factoriser les termes en fonction des vecteurs de base selon lesquels ils sont exprimés

#### *A.II.2.c.ii Erreur à ne pas faire*

Une **erreur souvent commise** consiste à écrire d'abord la formule de changement de base et à oublier que le terme de dérivation dans la nouvelle base n'est pas nul :

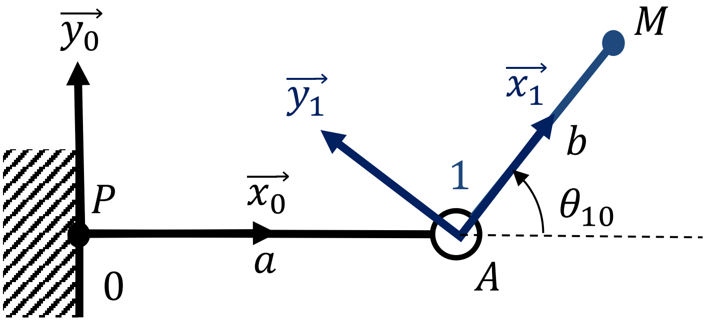
$$\cancel{\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_j + \overrightarrow{\Omega_{j/0}} \wedge \overrightarrow{PM}}$$

Généralement :

- Le vecteur $\overrightarrow{PM}$ s'exprime en fonction des vecteurs de différentes bases
- Le terme $\left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_j$ n'est pas nul et nécessitera une décomposition par Chasles (qui aurait du être faite avant) et à nouveau un changement de base induisant un travail inverse à la première transformation

Exemple :

Soit une pièce 1 en rotation par rapport à la pièce 0 au point $A$ :




Soit $P$ fixe dans 0, on exprime le vecteur position de $M$ dans le repère 0 :

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{x_0} + b\overrightarrow{x_1}$$

On définit le vecteur rotation de la pièce 1 par rapport à la pièce 0 ainsi :

$$\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_0} = \dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_1}$$

$a$ et $b$ étant constants

On peut alors calculer la vitesse de $M$ par rapport à la pièce 0 :

| $\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_0$ | |
|---|---|
| Bonne démarche | Mauvaise démarche |
| $\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d(a\overrightarrow{x_0} + b\overrightarrow{x_1})}{dt}\right)_0$<br>$\vec{V}(M/0) = \left.\frac{da\overrightarrow{x_0}}{dt}\right)_0 + \left.\frac{db\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_0$<br>$\vec{V}(M/0) = b\left.\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_0 = b\overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge\overrightarrow{x_1}$<br>$\vec{V}(M/0) = b\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}$ | $\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge\overrightarrow{PM}$<br>Ici le terme $\left.\frac{d\overrightarrow{PM}}{dt}\right)_1$ ne présente aucune utilité<br>$\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d(a\overrightarrow{x_0} + b\overrightarrow{x_1})}{dt}\right)_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge(a\overrightarrow{x_0} + b\overrightarrow{x_1})$<br>$\vec{V}(M/0) = \left.\frac{da\overrightarrow{x_0}}{dt}\right)_1 + \left.\frac{db\overrightarrow{x_1}}{dt}\right)_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge a\overrightarrow{x_0} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\wedge b\overrightarrow{x_1}$<br>On doit rechanger de base le terme $\left.\frac{da\overrightarrow{x_0}}{dt}\right)_1$<br>$\vec{V}(M/0) = \left.\frac{da\overrightarrow{x_0}}{dt}\right)_0 + \overrightarrow{\Omega_{0/1}}\wedge a\overrightarrow{x_0} + a\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_0} + b\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}$<br>$\vec{V}(M/0) = a\dot{\theta}_{0/1}\overrightarrow{y_0} + a\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_0} + b\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}$<br>$\vec{V}(M/0) = b\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}$<br>On comprend ainsi l'intérêt de ce paragraphe… |

Donc :

$$\vec{V}(M/0) = b\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}$$

Ne pas projeter ce résultat si ce n'est pas demandé.

## A.II.3 Trajectoire

La trajectoire du point $M$ dans $R_0$ est l'ensemble de ses positions au cours de son mouvement. La vitesse d'un point est toujours tangente à sa trajectoire.

## A.II.4 Accélération

### A.II.4.a Définition

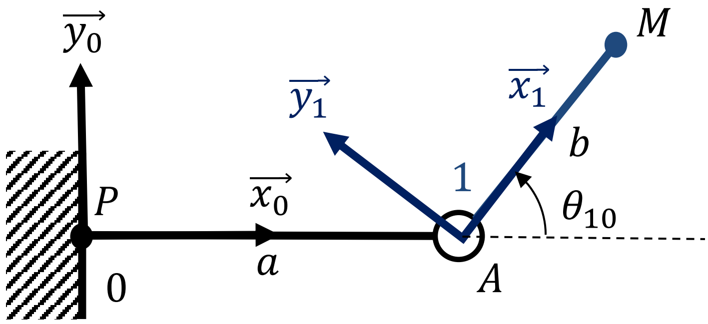
L'accélération du point $M$ dans la base $\mathfrak{B}_0$ notée $\vec{\Gamma}(M/0)$ est la dérivée par rapport au temps et par rapport à la base $\mathfrak{B}_0$ de son vecteur vitesse $\vec{V}(M/0)$:

$$\boxed{\vec{\Gamma}(M/0) = \left.\frac{d\vec{V}(M/0)}{dt}\right)_0}$$

$$\vec{\Gamma}(M/0) = \ddot{X}_M\overrightarrow{x_0} + \ddot{Y}_M\overrightarrow{y_0} + \ddot{Z}_M\overrightarrow{z_0}$$

### A.II.4.b Exemple

Reprenons l'exemple du paragraphe précédent :




On a montré que :

$$\vec{V}(M/0) = b\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}$$

On a donc :

$$\vec{\Gamma}(M/0) = \left.\frac{d\vec{V}(M/0)}{dt}\right)_0 = \left.\frac{db\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1}}{dt}\right)_0 = b\left[\left.\frac{d\dot{\theta}_{1/0}}{dt}\right)_0\overrightarrow{y_1} + \dot{\theta}_{1/0}\left.\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right)_0\right]$$

$$\vec{\Gamma}(M/0) = b\left[\ddot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1} + \dot{\theta}_{1/0}\left.\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right)_0\right]$$

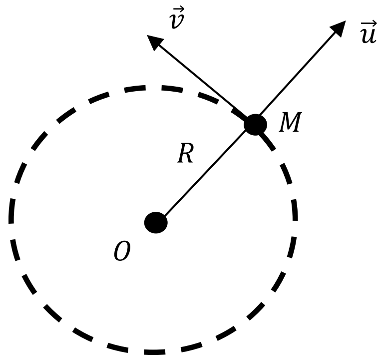
$$\left.\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right)_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right)_1 + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\Lambda\overrightarrow{x_1} = \dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{z_1}\Lambda\overrightarrow{y_1} = -\dot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{x_1}$$

$$\vec{\Gamma}(M/0) = b\left[\ddot{\theta}_{1/0}\overrightarrow{y_1} - \dot{\theta}_{1/0}{}^2\overrightarrow{x_1}\right]$$

### A.II.4.c Remarque

La relation en norme n'est pas vraie en général : $\left\|\vec{\Gamma}(M/0)\right\| \neq \frac{d\left\|\vec{V}(M/0)\right\|}{dt}$

Exemple : mouvement de rotation à vitesse constante $\omega = scte > 0 \Rightarrow \dot{\omega} = 0$




$$\overrightarrow{OM} = R\vec{u}$$

$$\vec{V}(M/0) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_0 = R\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_0 = R\omega\vec{v}$$

$$\vec{\Gamma}(M/0) = \left.\frac{d\vec{V}(M/0)}{dt}\right)_0 = R\dot{\omega}\vec{v} - R\omega^2\vec{u} = -R\omega^2\vec{u}$$

$$\left\|\vec{V}(M/0)\right\| = R\omega \quad ; \quad \frac{d\left\|\vec{V}(M/0)\right\|}{dt} = R\dot{\omega} = 0$$

$$\left\|\vec{\Gamma}(M/0)\right\| = R\omega^2$$

Elle n'est vraie que lorsque la vitesse est exprimée selon un vecteur constant de la base 0 :

$$\vec{V}(M/0) = f(t)\vec{u} \quad ; \quad \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\Gamma}(M/0) = f'(t)\vec{u}$$

Prenons $\|\vec{u}\| = 1$ pour simplifier.

$$\left\|\vec{V}(M/0)\right\| = f(t) \quad ; \quad \left\|\vec{\Gamma}(M/0)\right\| = f'(t)\vec{u} \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{\Gamma}(M/0)\right\| = \frac{d\left\|\vec{V}(M/0)\right\|}{dt}$$