

SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS

I- Système de deux équations du premier degré à deux inconnues :

*** Définition :** Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y est de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ où } a, b, c, a', b' \text{ et } c' \text{ désignent des nombres donnés.}$$

Un couple (x, y) est solution d'un système s'il vérifie simultanément les deux égalités.

*** Exemple 1 :** $\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues.

*** Exemple 2 :** Le couple $(3, 1)$ est-il solution du système $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$?

Pour $x = 3$ et $y = 1$: $\begin{cases} 2 \times 3 - 1 = 6 - 1 = 5 \\ 3 + 1 = 4 \end{cases}$

Les deux égalités sont simultanément vérifiées pour : $x = 3$ et $y = 1$.

Donc le couple $(3, 1)$ est solution du système $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + y = 4 \end{cases}$

II- Résolution du système :

*** Définition :** Résoudre un système de deux équations à deux inconnues revient à déterminer tous les couples de nombres (x, y) qui vérifient simultanément les deux équations.

1) Résoudre algébriquement un système :

a/ Résolution par substitution :

Cette méthode consiste à exprimer l'un des inconnues en fonction de l'autre dans l'une des équations et le substituer dans l'autre équation pour trouver une équation de premier degré d'une inconnue.

*** Exemple :** Résous le système $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$ par substitution.

→ On a : $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$ alors : $\begin{cases} y = 9 + 3x \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$

On remplace y par sa valeur dans l'équation (2) :

$$\begin{cases} y = 9 + 3x \\ 4x - 3 \times (9 + 3x) = -17 \end{cases}, \text{ donc : } \begin{cases} y = 9 + 3x \\ 4x - 27 - 9x = -17 \end{cases}$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} y = 9 + 3x \\ 4x - 9x = -17 + 27 \end{cases}, \text{ donc : } \begin{cases} y = 9 + 3x \\ -5x = 10 \end{cases}, \text{ Alors : } \begin{cases} y = 9 + 3x \\ x = \frac{10}{-5} = -2 \end{cases}$$

$$\text{Enfin : } \begin{cases} y = 9 + 3 \times (-2) = 9 - 6 = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Donc le couple $(-2, 3)$ est la solution de ce système.

b/ Résolution par combinaison linéaire :

Cette méthode consiste à multiplier les membres de chaque équation pour obtenir des coefficients opposés de l'une des inconnues, puis on ajoute membre à membre les deux équations du système pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

*** Exemple :** Résous le système $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ par combinaison linéaire.

→ On cherche à éliminer l'inconnue x pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

* On multiplie les deux membres de la première équation par **2** et ceux de la deuxième par **(-5)**.

$$\begin{cases} 2 \times (5x - 4y) = 2 \times 8 \\ -5 \times (2x + 5y) = -5 \times 1 \end{cases} \text{ on obtient : } \begin{cases} 10x - 8y = 16 \\ -10x - 25y = -5 \end{cases}$$

* On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer x .

$$10x + (-10x) - 8y + (-25y) = 16 + (-5)$$

* On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de y .

$$10x - 10x - 8y - 25y = 16 - 5$$

c'est-à-dire : $-33y = 11$ donc : $y = \frac{11}{-33}$ signifie que : $y = \frac{-1}{3}$.

* On remplace y par $\frac{-1}{3}$ dans l'une des deux équations pour trouver x .

Ici on choisit la 2^{ème} équation et on trouve : $2x + 5 \times \left(\frac{-1}{3}\right) = 1$

$$\text{c'est-à-dire : } 2x - \frac{5}{3} = 1$$

$$2x = 1 + \frac{5}{3} \rightarrow 2x = \frac{3}{3} + \frac{5}{3} \rightarrow 2x = \frac{8}{3} \rightarrow x = \frac{8}{3} \div 2 \rightarrow x = \frac{8}{3} \times \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$\text{Donc : } x = \frac{4}{3}.$$

Alors le couple $\left(\frac{-1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ est la solution de ce système.

2) Résoudre graphiquement un système :

Cette méthode consiste à relier chaque équation à une droite, puis on représente chacune des droites dans un même repère orthonormé.

La solution, si elle existe, est donnée par les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

* **Exemple :** Résous graphiquement le système $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$

→ Pour chaque équation on exprime y en fonction de x , et on obtient :

$$\begin{cases} -y = -4x + 2 \\ -y = -2x - 2 \end{cases} \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

Dans un repère on trace les deux droites (D_1) d'équation : $y = 4x - 2$, et

(D_2) d'équation : $y = 2x + 2$.

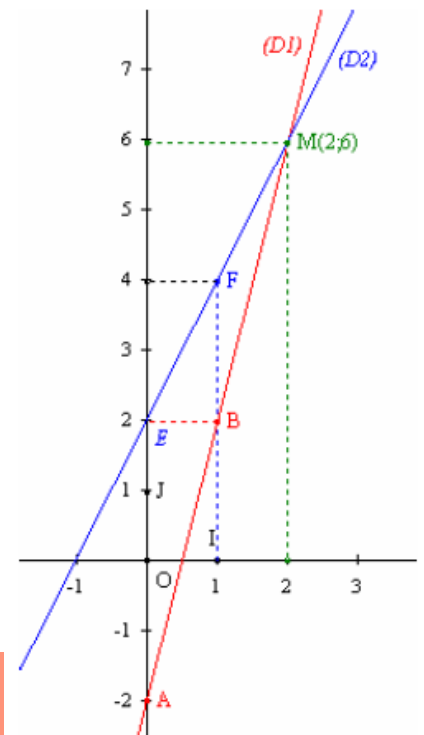
$$\text{- Pour } (D_1) : \begin{cases} x_A = 0 \Rightarrow y_A = 4x_A - 2 = 4 \times 0 - 2 = 0 - 2 = -2 \\ x_B = 1 \Rightarrow y_B = 4x_B - 2 = 4 \times 1 - 2 = 4 - 2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{- Pour } (D_2) : \begin{cases} x_E = 0 \Rightarrow y_E = 2x_E + 2 = 2 \times 0 + 2 = 0 + 2 = 2 \\ x_F = 1 \Rightarrow y_F = 2x_F + 2 = 2 \times 1 + 2 = 2 + 2 = 4 \end{cases}$$

Dans un repère orthonormé, on trace les deux droites (D_1) et (D_2) .

* Les deux droites (D_1) et (D_2) se coupent en un point : $M(2,6)$.

→ Alors le couple $(2,6)$ est la solution de ce système.



* **Remarque :** - Si les deux droites ont le même coefficient directeur, alors le système n'a pas de solution.

- Si les deux droites ont le même coefficient directeur et le même ordonné à l'origine, alors le système a plusieurs solutions.

III- Résolution d'un problème avec un système :



* **Règle :** Les étapes pour résoudre un problème :

- Choisir les inconnues.
- Mise en système d'équations.
- Résoudre le système.
- Vérification (vérifier que le couple trouvé est solution de problème).
- Conclusion.

* **Exemple :** Un musée propose un tarif pour les adultes à 70 DH et un tarif pour les enfants à 45 DH. Lors d'une journée, ce musée a reçu la visite de 205 personnes et la recette totale a été de 12225 DH.

Retrouve le nombre d'adultes et le nombre d'enfants ayant visité le musée lors de cette journée.

→ * **Choix des inconnues :** Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants.

* **Mise en système d'équation :**

- 205 personnes ont visité le musée donc : $x + y = 205$
- La recette a été de 12225 DH alors : $70x + 45y = 12225$

* **Résoudre le système :** On résout le système par la méthode de substitution.

$$\begin{cases} x + y = 205 \\ 70x + 45y = 12225 \end{cases}, \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} x = 205 - y \\ 70x + 45y = 12225 \end{cases}$$

$$\text{Signifie : } \begin{cases} x = 205 - y \\ 70(205 - y) + 45y = 12225 \end{cases}, \text{ donc : } \begin{cases} x = 205 - y \\ 14350 - 70y + 45y = 12225 \end{cases}$$

$$\text{Signifie : } \begin{cases} x = 205 - y \\ -70y + 45y = 12225 - 14350 \end{cases}, \text{ alors : } \begin{cases} x = 205 - y \\ -25y = -2125 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} x = 205 - y \\ y = \frac{-2125}{-25} = 85 \end{cases}, \text{ alors : } \begin{cases} x = 205 - 85 = 120 \\ y = 85 \end{cases}$$

$$\text{* Vérification : On a : } \begin{cases} 120 + 85 = 205 \\ 70 \times 120 + 45 \times 85 = 8400 + 3825 = 12225 \end{cases}$$

* **Conclusion :** Alors le nombre d'adultes est 120, et le nombre d'enfants est 85.

EXERCICES

Exercice 1 : Le couple (5,1) est-il solution du système : $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ -3x + 8y = -7 \end{cases}$?

$$\rightarrow \text{ Pour } x = 5 \text{ et } y = 1 : \begin{cases} 5 + 2 \times 1 = 5 + 2 = 7 \\ -3 \times 5 + 8 \times 1 = -15 + 8 = -7 \end{cases}$$

Les deux égalités sont simultanément vérifiées pour : $x = 5$ et $y = 1$.

$$\text{Donc le couple (5,1) est solution du système } \begin{cases} x + 2y = 7 \\ -3x + 8y = -7 \end{cases}$$

Exercice 2 : Résous par la méthode de substitution les systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 7y = 12 \end{cases} ; \quad 2) \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} ; \quad 3) \begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 7y = 12 \end{cases} \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} x = 2y \\ 2x - 7y = 12 \end{cases} \text{ signifie : } \begin{cases} x = 2y \\ 2 \times 2y - 7y = 12 \end{cases} \text{ donc : } \begin{cases} x = 2y \\ 4y - 7y = 12 \end{cases}$$

$$\text{c'est-à-dire : } \begin{cases} x = 2y \\ -3y = 12 \end{cases} \text{ donc : } \begin{cases} x = 2y \\ y = \frac{12}{-3} = -4 \end{cases} \text{ alors : } \begin{cases} x = 2 \times (-4) = -8 \\ y = -4 \end{cases}$$

Alors le couple $(-8, -4)$ est la solution de ce système.

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x = 1 - y \end{cases} \text{ signifie : } \begin{cases} 2(1 - y) - y = 2 \\ x = 1 - y \end{cases} \text{ donc : } \begin{cases} 2 - 2y - y = 2 \\ x = 1 - y \end{cases}$$

$$\text{c'est-à-dire : } \begin{cases} -2y - y = 2 - 2 \\ x = 1 - y \end{cases} \text{ donc : } \begin{cases} -3y = 0 \\ x = 1 - y \end{cases} \text{ alors : } \begin{cases} y = \frac{0}{-3} = 0 \\ x = 1 - y \end{cases} \text{ enfin : } \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 - 0 = 1 \end{cases}$$

Alors le couple $(1, 0)$ est la solution de ce système.

$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x - 6y = 4 \end{cases} \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} x = 2 + 3y \\ 2x - 6y = 4 \end{cases} \text{ signifie : } \begin{cases} x = 2 + 3y \\ 2(2 + 3y) - 6y = 4 \end{cases} \text{ donc : } \begin{cases} x = 2 + 3y \\ 4 + 6y - 6y = 4 \end{cases}$$

$$\text{c'est-à-dire : } \begin{cases} x = 2 + 3y \\ 6y - 6y = 4 - 4 \end{cases} \text{ donc : } \begin{cases} x = 2 + 3y \\ 0y = 0 \end{cases}$$

Puisqu'on a : $0y = 0$ dans l'équation (2).

Alors tous les nombres réels sont des solutions de ce système.

Exercice 3 : Résous par la méthode de la combinaison linéaire les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -6x + 3y = 3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 12x + 14y = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 9x - 7y = 8 \\ -2x + 7y = 2 \end{cases}$$

$\rightarrow$ $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -6x + 3y = 3 \end{cases}$ On multiplie les deux membres de la première équation par **3**, puis on ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer x .

$$\begin{cases} 3 \times (2x - y) = 3 \times 3 \\ -6x + 3y = 3 \end{cases} \text{ signifie : } \begin{cases} 6x - 3y = 9 \\ -6x + 3y = 3 \end{cases} \text{ donc : } 6x + (-6x) - 3y + 3y = 9 + 3$$

c'est-à-dire : $6x - 6x - 3y + 3y = 12$, donc : $0x + 0y = 12$, d'où : $0 = 12$.

Alors le système n'a pas de solutions.

$\begin{cases} 12x + 14y = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$ On multiplie les deux membres de la deuxième équation par **(-6)**, puis on ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer x .

$$\begin{cases} 12x + 14y = 2 \\ -6 \times (2x + 4y) = -6 \times 2 \end{cases} \text{ signifie : } \begin{cases} 12x + 14y = 2 \\ -12x - 24y = -12 \end{cases} \text{ donc : } 12x + (-12x) + 14y + (-24y) = 2 + (-12)$$

$$\text{c'est-à-dire : } 12x - 12x + 14y - 24y = 2 - 12$$

$$\text{d'où : } -10y = -10$$

$$\text{donc : } y = \frac{-10}{-10} = 1$$

On remplace y par 1 dans la deuxième équation pour trouver x .

$$\rightarrow 2x + 4 \times 1 = 2$$

$$\text{signifie : } 2x = 2 - 4$$

$$\text{d'où : } 2x = -2$$

$$\text{Enfin : } x = \frac{-2}{2} = -1$$

Alors le couple $(-1, 1)$ est la solution de ce système.

$\begin{cases} 9x - 7y = 8 \\ -2x + 7y = 2 \end{cases}$ On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer y .

On obtient : $9x + (-2x) - 7y + 7y = 8 + 2$, signifie : $9x - 2x = 10$, d'où : $7x = 10$, donc : $x = \frac{10}{7}$.

On remplace x par $\frac{10}{7}$ dans la deuxième équation pour trouver y .

$$\rightarrow -2 \times \frac{10}{7} + 7y = 2, \text{ signifie : } \frac{-20}{7} + 7y = 2, \text{ c'est-à-dire : } 7y = 2 + \frac{20}{7}, \text{ d'où : } 7y = \frac{14}{7} + \frac{20}{7} = \frac{34}{7}$$

$$\text{donc : } y = \frac{34}{7} \div 7, \text{ signifie : } y = \frac{34}{7} \times \frac{1}{7}, \text{ enfin : } y = \frac{34}{49}.$$

Alors le couple $(\frac{10}{7}, \frac{34}{49})$ est la solution de ce système.

Exercice 4 : Résous graphiquement les systèmes suivants :

$$1) \begin{cases} -x + y + 3 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases} ; \quad 2) \begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ 6x + 2y - 2 = 0 \end{cases} ; \quad 3) \begin{cases} -3x - 2y = -3 \\ 6x + 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow 1) \begin{cases} -x + y + 3 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases} \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} y = x - 3 \\ -y = -2x + 4 \end{cases} \text{ signifie : } \begin{cases} y = x - 3 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

Dans un repère on trace les deux droites (D) d'équation : $y = x - 3$,

et (Δ) d'équation : $y = 2x - 4$.

$$\text{- Pour } (D) : \begin{cases} x_A = 0 \Rightarrow y_A = x_A - 3 = 0 - 3 = -3 \\ x_B = 1 \Rightarrow y_B = x_B - 3 = 1 - 3 = -2 \end{cases}$$

$$\text{- Pour } (\Delta) : \begin{cases} x_E = 0 \Rightarrow y_E = 2x_E - 4 = 2 \times 0 - 4 = 0 - 4 = -4 \\ x_F = 1 \Rightarrow y_F = 2x_F - 4 = 2 \times 1 - 4 = 2 - 4 = -2 \end{cases}$$

Dans un repère orthonormé, on trace les deux droites (D) et (Δ) .

* Les deux droites (D) et (Δ) se coupent en un point : $A(1, -2)$.

Alors le couple $(1, -2)$ est la solution de ce système.

$$2) \begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ 6x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} y = -3x + 1 \\ 2y = -6x + 2 \end{cases}$$

$$\text{signifie : } \begin{cases} y = -3x + 1 \\ y = -\frac{6}{2}x + \frac{2}{2} \end{cases} \text{ signifie : } \begin{cases} y = -3x + 1 \\ y = -3x + 1 \end{cases}$$

On considère les droites (D) d'équation : $y = -3x + 1$, et (Δ) d'équation : $y = -3x + 1$.

On observe que les deux droites ont le même coefficient directeur et le même ordonné à l'origine.

Alors tous les nombres réels sont des solutions de ce système.

$$3) \begin{cases} -3x - 2y = -3 \\ 6x + 4y + 1 = 0 \end{cases} \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} -2y = 3x - 3 \\ 4y = -6x - 1 \end{cases} \text{ signifie : } \begin{cases} y = \frac{-3}{2}x - \frac{3}{2} \\ y = \frac{-6}{4}x - \frac{1}{4} \end{cases} \text{ c'est-à-dire : } \begin{cases} y = \frac{-3}{2}x - \frac{3}{2} \\ y = \frac{-3}{2}x - \frac{1}{4} \end{cases}$$

On considère les droites (D) d'équation : $y = \frac{-3}{2}x - \frac{3}{2}$, et (Δ) d'équation : $y = \frac{-3}{2}x - \frac{1}{4}$.

On observe que les deux droites ont le même coefficient directeur.

Alors le système n'a pas de solutions.

Exercice 5 : Pour classer des photos, un magasin propose deux types de rangement : des albums et des boîtes.

Loubna achète 6 boîtes et 5 albums et paie 610 DH.

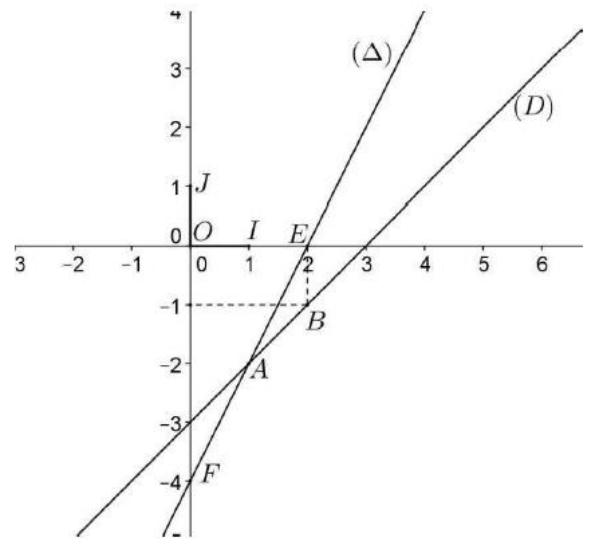
Youssef achète 3 boîtes et 7 albums et paie 530 DH.

Quel est le prix d'une boîte ? et quel est le prix d'un album ?

$\rightarrow$ * Choix des inconnues : soit x le prix d'une boîte et y le prix d'un album.

* Mise en système d'équation : - Loubna achète 6 boîtes et 5 albums et paie 610 DH, donc : $6x + 5y = 610$.

- Youssef achète 3 boîtes et 7 albums et paie 530 DH, donc : $3x + 7y = 530$.



* **Résoudre le système** : On résout le système par la méthode de la combinaison linéaire.

$$\begin{cases} 6x + 5y = 610 \\ 3x + 7y = 530 \end{cases} \quad \text{On multiplie les deux membres de la deuxième équation par } (-2).$$

On obtient : $\begin{cases} 6x + 5y = 610 \\ -2 \times (3x + 7y) = -2 \times 530 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} 6x + 5y = 610 \\ -6x - 14y = -1060 \end{cases}$

On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer x .

Donc : $6x + (-6x) + 5y + (-14y) = 610 + (-1060)$, c'est-à-dire : $6x - 6x + 5y - 14y = 610 - 1060$

Signifie : $-9y = -450$, donc : $y = \frac{-450}{-9} = 50$.

On remplace y par 50 dans la première équation pour trouver x .

→ $6x + 5 \times 50 = 610$, c'est-à-dire : $6x + 250 = 610$, d'où : $6x = 610 - 250$, donc : $6x = 360$, enfin : $x = \frac{360}{6} = 60$.

* **Vérification** : On a : $\begin{cases} 6 \times 60 + 5 \times 50 = 360 + 250 = 610 \\ 3 \times 60 + 7 \times 50 = 180 + 350 = 530 \end{cases}$

* **Conclusion** : Alors le prix d'une boîte est 60 DH, et le prix d'un album est 50 DH.

Exercice 6 : Résous le système suivant : $\begin{cases} 3x + 2y = 53 \\ 4x + y = 49 \end{cases}$

2) Chez un marchand de fruits :

* Fatima a payé 53 DH pour l'achat de 3Kg de bananes et 2Kg de pommes.

* Bilal a payé 49 DH pour l'achat de 4Kg de bananes et 1Kg de pommes.

Détermine le prix d'un kilogramme de bananes et d'un kilogramme de pommes.

→ On résout le système par la méthode de substitution :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 53 \\ 4x + y = 49 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire : } \begin{cases} 3x + 2y = 53 \\ y = 49 - 4x \end{cases} \quad \text{d'où : } \begin{cases} 3x + 2(49 - 4x) = 53 \\ y = 49 - 4x \end{cases} \quad \text{donc : } \begin{cases} 3x + 98 - 8x = 53 \\ y = 49 - 4x \end{cases}$$

c'est-à-dire : $\begin{cases} 3x - 8x = 53 - 98 \\ y = 49 - 4x \end{cases}$ donc : $\begin{cases} -5x = -45 \\ y = 49 - 4x \end{cases}$ alors : $\begin{cases} x = \frac{-45}{-5} \\ y = 49 - 4x \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} x = 9 \\ y = 49 - 4 \times 9 \end{cases}$

enfin : $\begin{cases} x = 9 \\ y = 49 - 36 = 13 \end{cases}$

Alors le couple (9,13) est la solution de ce système.

2) * **Choix des inconnues** : soit x le prix d'un kilogramme de bananes et y le prix d'un kilogramme de pommes.

* **Mise en système d'équation** :

- Fatima a payé 53 DH pour l'achat de 3Kg de bananes et 2Kg de pommes, donc : $3x + 2y = 53$.

- Bilal a payé 49 DH pour l'achat de 4Kg de bananes et 1Kg de pommes, donc : $4x + y = 49$.

* **Résoudre le système** : On a : $\begin{cases} 3x + 2y = 53 \\ 4x + y = 49 \end{cases}$, d'après la question précédente on a : $x = 9$ et $y = 13$.

* **Vérification** : On a : $\begin{cases} 3 \times 9 + 2 \times 13 = 27 + 26 = 53 \\ 4 \times 9 + 13 = 36 + 13 = 49 \end{cases}$

* **Conclusion** : Alors le prix d'un kilogramme de bananes est 9 DH et le prix d'un kilogramme de pommes est 13 DH.

ملاحظة : المرجو تدوين الدرس في دفتر الدروس

#خليك_فالدّار